

# Estabilidad para modelo Light Sheet Fluorescence Microscopy 2D y extensión del modelo al caso tridimensional

Pablo Arratia

Comisión: Axel Osses, Matías Courdurier, Carlos Conca

Departamento de Ingeniería Matemática  
Universidad de Chile



12 de agosto de 2020

## 1 Introducción

- Introducción y motivación del problema

## 2 Modelo directo 2D

- Ecuación de Fermi pencil-beam y ecuación de transporte radiativo
- Problema inverso. Ecuación de calor y unicidad del problema

## 3 Estabilidad LSFM 2D

- Estabilidad logarítmica para recuperar condición inicial en ecuación de calor
- Estabilidad Lipschitz para recuperar condición inicial en ecuación de calor
- Estabilidad para el problema inverso de LSFM 2D

## 4 Modelo directo 3D

- Modelo directo LSFM 3D. Cámara colimada.
- ¿Y el blur? Cámara no colimada

## 5 Red neuronal

- Arquitectura de la red neuronal para el caso 2D
- Problema 1
- Problema 2

## 6 Conclusiones

- Conclusiones y trabajo a futuro

## Introducción y motivación del problema

### 1 Introducción

- Introducción y motivación del problema

### 2 Modelo directo 2D

- Ecuación de Fermi pencil-beam y ecuación de transporte radiativo
- Problema inverso. Ecuación de calor y unicidad del problema

### 3 Estabilidad LSFM 2D

- Estabilidad logarítmica para recuperar condición inicial en ecuación de calor
- Estabilidad Lipschitz para recuperar condición inicial en ecuación de calor
- Estabilidad para el problema inverso de LSFM 2D

### 4 Modelo directo 3D

- Modelo directo LSFM 3D. Cámara colimada.
- ¿Y el blur? Cámara no colimada

### 5 Red neuronal

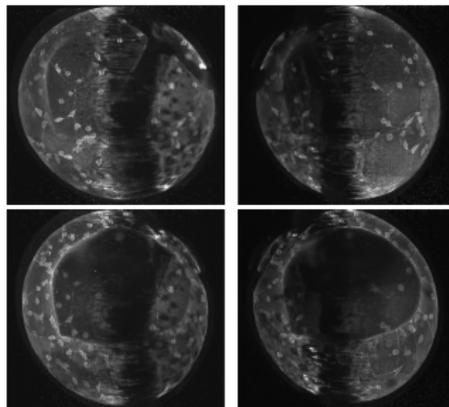
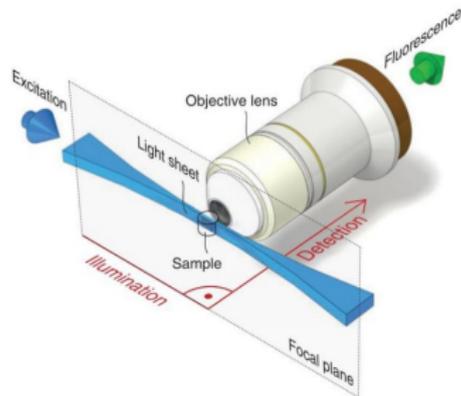
- Arquitectura de la red neuronal para el caso 2D
- Problema 1
- Problema 2

### 6 Conclusiones

- Conclusiones y trabajo a futuro

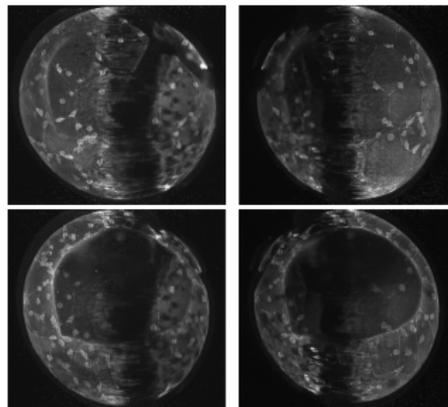
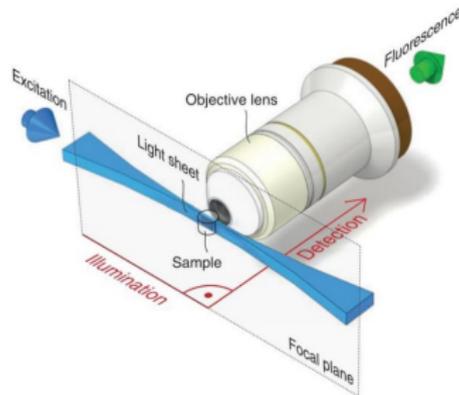
## Introducción y motivación del problema

- En microscopía de fluorescencia, estructuras del espécimen son etiquetadas con **fluoróforos**.



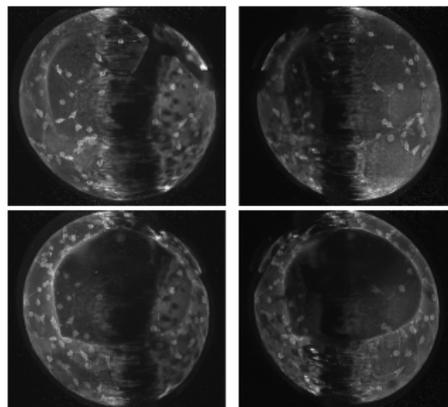
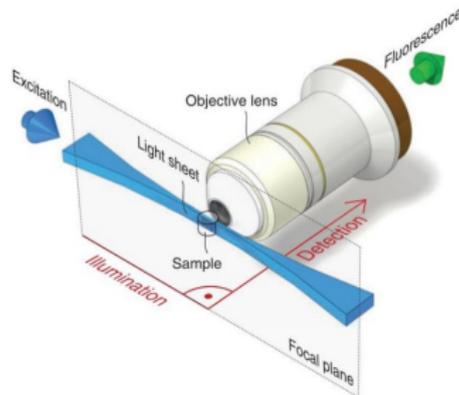
## Introducción y motivación del problema

- En microscopía de fluorescencia, estructuras del espécimen son etiquetadas con **fluoróforos**.
- El espécimen es iluminado excitando los fluoróforos.



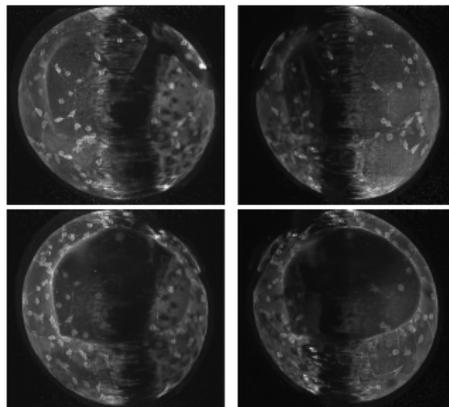
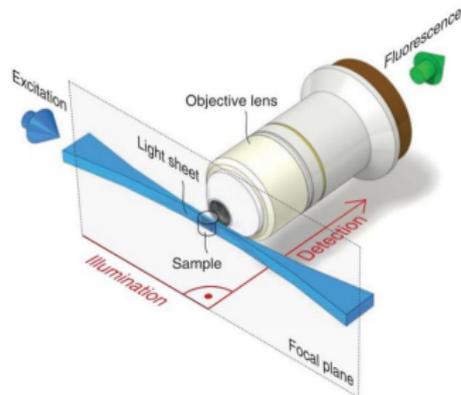
## Introducción y motivación del problema

- En microscopía de fluorescencia, estructuras del espécimen son etiquetadas con **fluoróforos**.
- El espécimen es iluminado excitando los fluoróforos.
- Los fluoróforos emiten radiación captada por cámaras.



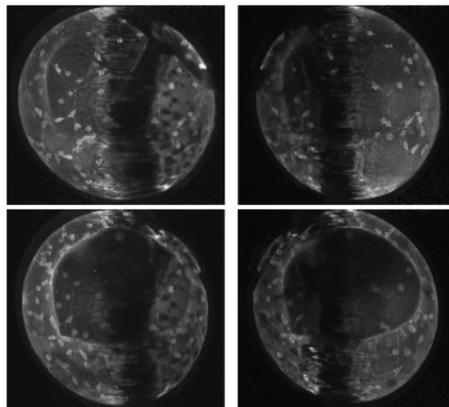
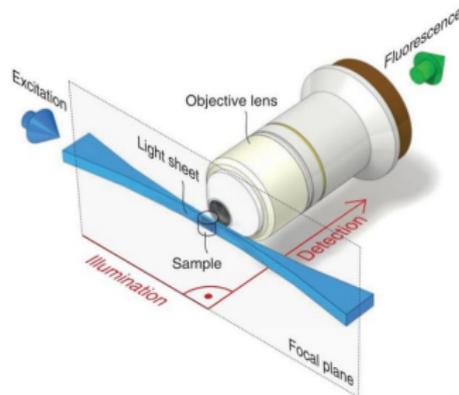
## Introducción y motivación del problema

- En microscopía de fluorescencia, estructuras del espécimen son etiquetadas con **fluoróforos**.
- El espécimen es iluminado excitando los fluoróforos.
- Los fluoróforos emiten radiación captada por cámaras.
- El LSMF ilumina por planos. Baja foto toxicidad y foto blanqueamiento.



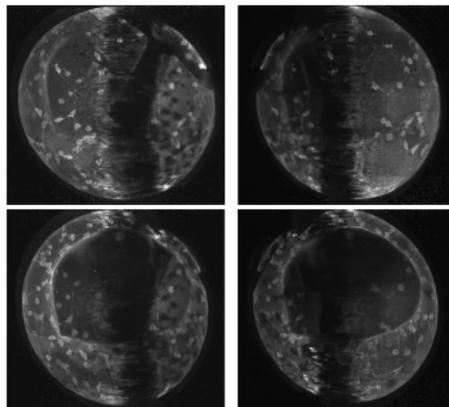
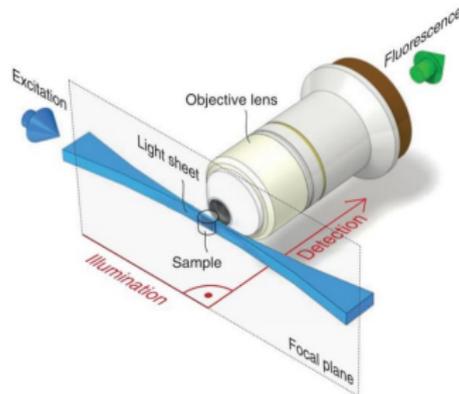
## Introducción y motivación del problema

- En microscopía de fluorescencia, estructuras del espécimen son etiquetadas con **fluoróforos**.
- El espécimen es iluminado excitando los fluoróforos.
- Los fluoróforos emiten radiación captada por cámaras.
- El LSMF ilumina por planos. Baja foto toxicidad y foto blanqueamiento.
- **Problema:** Blur y ruido en imágenes. ¿Cómo reconstruir la distribución de fluoróforos a partir de las mediciones?



## Introducción y motivación del problema

- En microscopía de fluorescencia, estructuras del espécimen son etiquetadas con **fluoróforos**.
- El espécimen es iluminado excitando los fluoróforos.
- Los fluoróforos emiten radiación captada por cámaras.
- El LSMF ilumina por planos. Baja foto toxicidad y foto blanqueamiento.
- **Problema:** Blur y ruido en imágenes. ¿Cómo reconstruir la distribución de fluoróforos a partir de las mediciones?
- **Solución:** Plantear un problema inverso.



## Ecuación de Fermi pencil-beam y ecuación de transporte radiativo

### 1 Introducción

- Introducción y motivación del problema

### 2 Modelo directo 2D

- Ecuación de Fermi pencil-beam y ecuación de transporte radiativo
- Problema inverso. Ecuación de calor y unicidad del problema

### 3 Estabilidad LSFM 2D

- Estabilidad logarítmica para recuperar condición inicial en ecuación de calor
- Estabilidad Lipschitz para recuperar condición inicial en ecuación de calor
- Estabilidad para el problema inverso de LSFM 2D

### 4 Modelo directo 3D

- Modelo directo LSFM 3D. Cámara colimada.
- ¿Y el blur? Cámara no colimada

### 5 Red neuronal

- Arquitectura de la red neuronal para el caso 2D
- Problema 1
- Problema 2

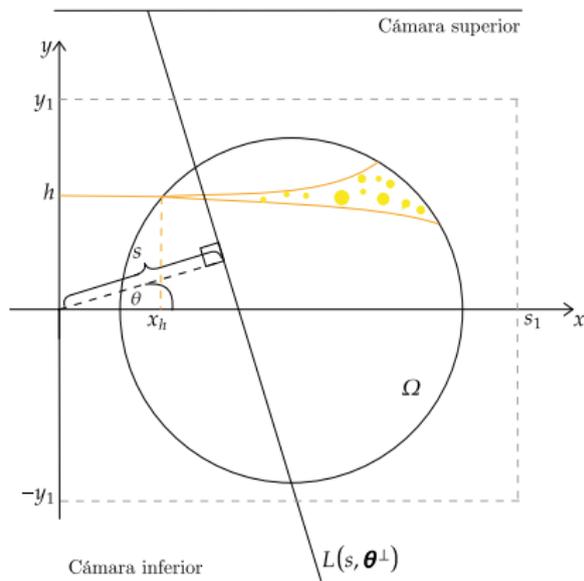
### 6 Conclusiones

- Conclusiones y trabajo a futuro

## Ecuación de Fermi pencil-beam y ecuación de transporte radiativo

## Setting del modelo:

- La muestra  $\Omega$  está contenida en  $[0, s_1] \times [-y_1, y_1]$ .

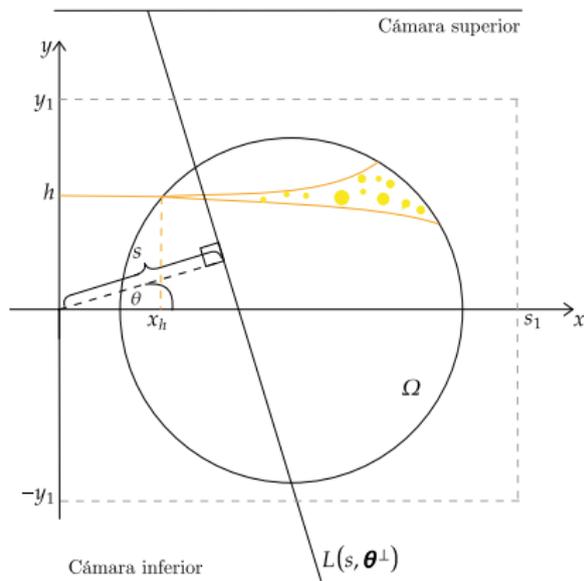




# Ecuación de Fermi pencil-beam y ecuación de transporte radiativo

## Setting del modelo:

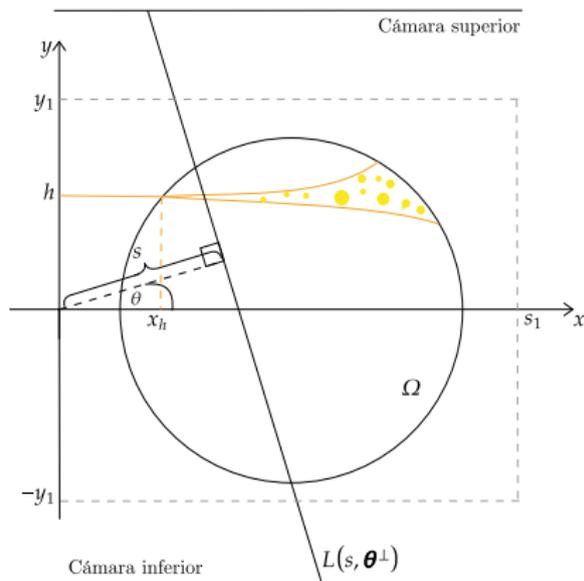
- La muestra  $\Omega$  está contenida en  $[0, s_1] \times [-y_1, y_1]$ .
- La distribución de fluoróforos se denota por  $\mu$ .
- Primera etapa:  
Iluminación/excitación.



## Ecuación de Fermi pencil-beam y ecuación de transporte radiativo

## Setting del modelo:

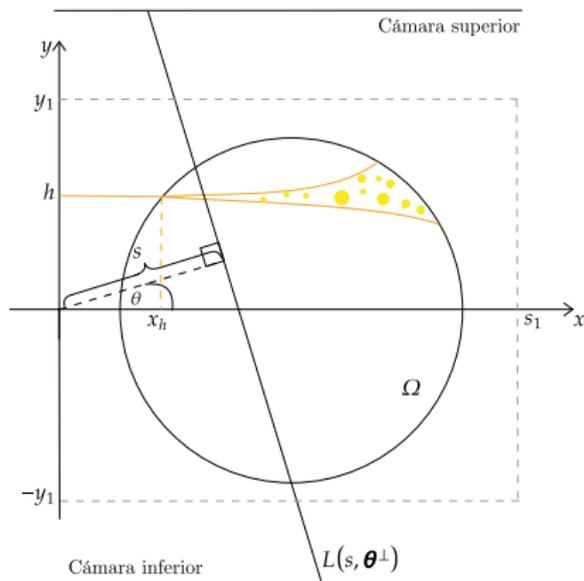
- La muestra  $\Omega$  está contenida en  $[0, s_1] \times [-y_1, y_1]$ .
- La distribución de fluoróforos se denota por  $\mu$ .
- Primera etapa:  
Iluminación/excitación.
- Segunda etapa:  
Proyección/detección.



## Ecuación de Fermi pencil-beam y ecuación de transporte radiativo

### Setting del modelo:

- La muestra  $\Omega$  está contenida en  $[0, s_1] \times [-y_1, y_1]$ .
- La distribución de fluoróforos se denota por  $\mu$ .
- Primera etapa:  
Iluminación/excitación.
- Segunda etapa:  
Proyección/detección.
- Dos cámaras captan la señal.



## Ecuación de Fermi pencil-beam y ecuación de transporte radiativo

## Etapa de iluminación:

- Ecuación de Fokker-Planck:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\cos(\theta_y)\partial_x + \sin(\theta_y)\partial_y + \underbrace{\lambda(x, y)}_{\text{Atenuación}} - \underbrace{\psi(x, y)}_{\text{Scattering}} \partial_{\theta_y}^2) u(x, y, \theta_y) = 0 \\ u(0, y, \theta_y) = \delta(y)\delta(\theta_y) \end{array} \right.$$

## Ecuación de Fermi pencil-beam y ecuación de transporte radiativo

## Etapa de iluminación:

- Ecuación de Fokker-Planck:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\cos(\theta_y)\partial_x + \sin(\theta_y)\partial_y + \underbrace{\lambda(x, y)}_{\text{Atenuación}} - \underbrace{\psi(x, y)}_{\text{Scattering}} \partial_{\theta_y}^2) u(x, y, \theta_y) = 0 \\ u(0, y, \theta_y) = \delta(y)\delta(\theta_y) \end{array} \right.$$

- Ecuación de Fermi pencil-beam ( $\theta_y \sim 0$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_x + \theta_y \partial_y + \lambda(x, h) - \psi(x, h) \partial_{\theta_y}^2) u(x, y, \theta_y) = 0 \\ u(x_h, y, \theta_y) = \delta_h(y) \delta_0(\theta_y) \\ x \in (x_h, \infty), y \in \mathbb{R}, \theta_y \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

## Ecuación de Fermi pencil-beam y ecuación de transporte radiativo

## Etapa de iluminación:

- Ecuación de Fokker-Planck:

$$\begin{cases} (\cos(\theta_y)\partial_x + \sin(\theta_y)\partial_y + \underbrace{\lambda(x, y)}_{\text{Atenuación}} - \underbrace{\psi(x, y)}_{\text{Scattering}} \partial_{\theta_y}^2) u(x, y, \theta_y) = 0 \\ u(0, y, \theta_y) = \delta(y)\delta(\theta_y) \end{cases}$$

- Ecuación de Fermi pencil-beam ( $\theta_y \sim 0$ ):

$$\begin{cases} (\partial_x + \theta_y \partial_y + \lambda(x, h) - \psi(x, h) \partial_{\theta_y}^2) u(x, y, \theta_y) = 0 \\ u(x_h, y, \theta_y) = \delta_h(y) \delta_0(\theta_y) \\ x \in (x_h, \infty), y \in \mathbb{R}, \theta_y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- Interesa la distribución de fotones independiente del ángulo, por tanto

$$v_h(x, y) = \int_{\mathbb{R}} u(x, y, \theta_y) d\theta_y = \exp\left(-\int_{x_h}^x \lambda(\tau, h) d\tau\right) \frac{1}{\alpha(x, h) \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-h)^2}{2\alpha^2(x, h)}\right)$$

$$\text{con } \alpha^2(x, h) = \int_{x_h}^x (x-\tau)^2 \psi(\tau, h) d\tau$$

## Ecuación de Fermi pencil-beam y ecuación de transporte radiativo

### Etapa de iluminación:

- Ecuación de Fokker-Planck:

$$\begin{cases} (\cos(\theta_y)\partial_x + \sin(\theta_y)\partial_y + \underbrace{\lambda(x, y)}_{\text{Atenuación}} - \underbrace{\psi(x, y)}_{\text{Scattering}} \partial_{\theta_y}^2) u(x, y, \theta_y) = 0 \\ u(0, y, \theta_y) = \delta(y)\delta(\theta_y) \end{cases}$$

- Ecuación de Fermi pencil-beam ( $\theta_y \sim 0$ ):

$$\begin{cases} (\partial_x + \theta_y \partial_y + \lambda(x, h) - \psi(x, h) \partial_{\theta_y}^2) u(x, y, \theta_y) = 0 \\ u(x_h, y, \theta_y) = \delta_h(y) \delta_0(\theta_y) \\ x \in (x_h, \infty), y \in \mathbb{R}, \theta_y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- Interesa la distribución de fotones independiente del ángulo, por tanto

$$v_h(x, y) = \int_{\mathbb{R}} u(x, y, \theta_y) d\theta_y = \exp\left(-\int_{x_h}^x \lambda(\tau, h) d\tau\right) \frac{1}{\alpha(x, h)\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-h)^2}{2\alpha^2(x, h)}\right)$$

$$\text{con } \alpha^2(x, h) = \int_{x_h}^x (x-\tau)^2 \psi(\tau, h) d\tau$$

- Fuente fluorescente:

$$w_h(x, y) = c \cdot \mu(x, y) \cdot v_h(x, y)$$

## Ecuación de Fermi pencil-beam y ecuación de transporte radiativo

## Etapa de fluorescencia:

- Ecuación de transporte radiativo.

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\theta} \cdot \nabla_{x,y} p_h(x, y, \boldsymbol{\theta}) + \underbrace{a(x, y)}_{\text{Atenuación}} p_h(x, y, \boldsymbol{\theta}) = w_h(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^1 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} p_h((x, y) - t\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^1 \end{array} \right.$$

## Ecuación de Fermi pencil-beam y ecuación de transporte radiativo

### Etapa de fluorescencia:

- Ecuación de transporte radiativo.

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\theta} \cdot \nabla_{x,y} p_h(x, y, \boldsymbol{\theta}) + \underbrace{a(x, y)}_{\text{Atenuación}} p_h(x, y, \boldsymbol{\theta}) = w_h(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^1 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} p_h((x, y) - t\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^1 \end{array} \right.$$

- La solución viene dada por

$$p_h(x, y, \boldsymbol{\theta}) = \int_{-\infty}^0 w_h((x, y) + r\boldsymbol{\theta}) \exp\left(-\int_r^0 a((x, y) + \tau\boldsymbol{\theta}) d\tau\right) dr$$

## Ecuación de Fermi pencil-beam y ecuación de transporte radiativo

### Etapa de fluorescencia:

- Ecuación de transporte radiativo.

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\theta} \cdot \nabla_{x,y} p_h(x, y, \boldsymbol{\theta}) + \underbrace{a(x, y)}_{\text{Atenuación}} p_h(x, y, \boldsymbol{\theta}) = w_h(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^1 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} p_h((x, y) - t\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^1 \end{array} \right.$$

- La solución viene dada por

$$p_h(x, y, \boldsymbol{\theta}) = \int_{-\infty}^0 w_h((x, y) + r\boldsymbol{\theta}) \exp\left(-\int_r^0 a((x, y) + \tau\boldsymbol{\theta}) d\tau\right) dr$$

- La medición en el píxel  $s$  para fotones viajando en dirección  $\boldsymbol{\theta}$  es

$$p_h(s, \boldsymbol{\theta}^\perp) = \lim_{t \rightarrow \infty} p_h(s\boldsymbol{\theta} + t\boldsymbol{\theta}^\perp, \boldsymbol{\theta}^\perp) = \int_{-\infty}^{\infty} w_h(s\boldsymbol{\theta} + r\boldsymbol{\theta}^\perp) \exp\left(-\int_r^{\infty} a(s\boldsymbol{\theta} + \tau\boldsymbol{\theta}^\perp) d\tau\right) dr$$

## Ecuación de Fermi pencil-beam y ecuación de transporte radiativo

### Etapa de fluorescencia:

- Ecuación de transporte radiativo.

$$\begin{cases} \boldsymbol{\theta} \cdot \nabla_{x,y} p_h(x, y, \boldsymbol{\theta}) + \underbrace{a(x, y)}_{\text{Atenuación}} p_h(x, y, \boldsymbol{\theta}) = w_h(x, y), & \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^1 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} p_h((x, y) - t\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) = 0, & \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^1 \end{cases}$$

- La solución viene dada por

$$p_h(x, y, \boldsymbol{\theta}) = \int_{-\infty}^0 w_h((x, y) + r\boldsymbol{\theta}) \exp\left(-\int_r^0 a((x, y) + \tau\boldsymbol{\theta}) d\tau\right) dr$$

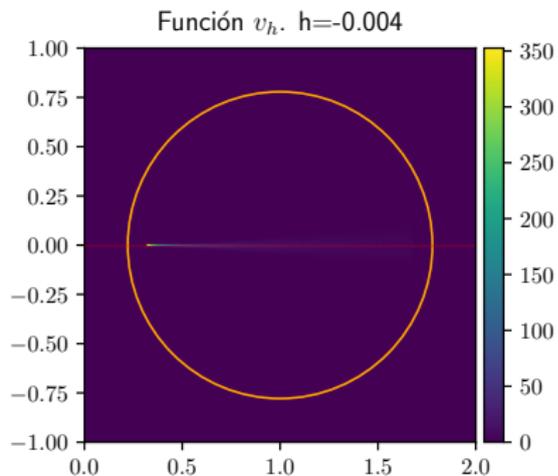
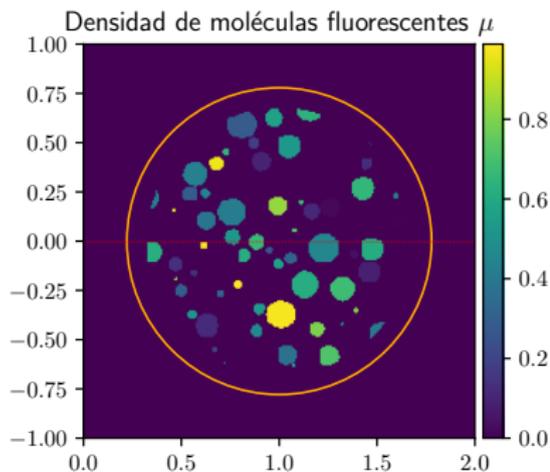
- La medición en el píxel  $s$  para fotones viajando en dirección  $\boldsymbol{\theta}$  es

$$p_h(s, \boldsymbol{\theta}^\perp) = \lim_{t \rightarrow \infty} p_h(s\boldsymbol{\theta} + t\boldsymbol{\theta}^\perp, \boldsymbol{\theta}^\perp) = \int_{-\infty}^{\infty} w_h(s\boldsymbol{\theta} + r\boldsymbol{\theta}^\perp) \exp\left(-\int_r^{\infty} a(s\boldsymbol{\theta} + \tau\boldsymbol{\theta}^\perp) d\tau\right) dr$$

- Si la cámara es colimada entonces  $\boldsymbol{\theta}^\perp = (0, 1)$ , luego la medición en el píxel  $s$  al iluminar a altura  $h$  es

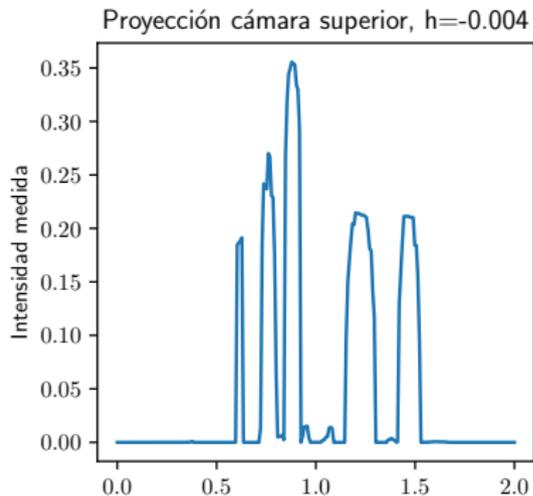
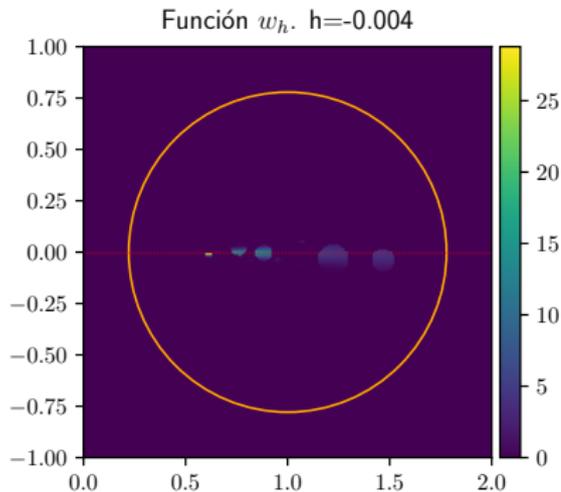
$$p(s, h) = c \cdot \exp\left(-\int_{x_h}^s \lambda(\tau, h) d\tau\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu(s, r) e^{-\int_r^{\infty} a(s, \tau) d\tau}}{\alpha(s, h) \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(r-h)^2}{2\alpha^2(s, h)}\right) dr$$

## Ecuación de Fermi pencil-beam y ecuación de transporte radiativo

Simulación numérica. Fuente  $\mu$  e iluminación  $v_h$ :

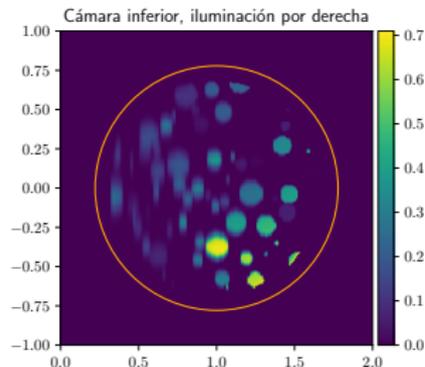
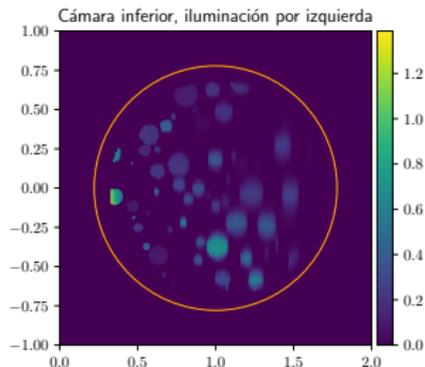
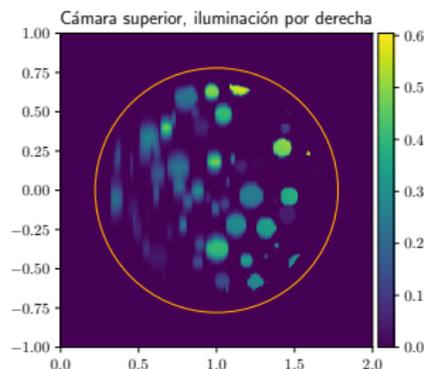
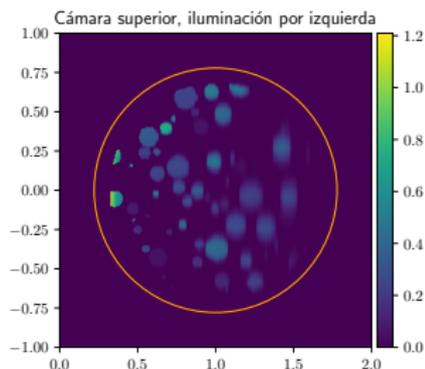
## Ecuación de Fermi pencil-beam y ecuación de transporte radiativo

Simulación numérica. Imagen  $w_h = c \cdot \mu \cdot v_h$  y proyección.



## Ecuación de Fermi pencil-beam y ecuación de transporte radiativo

## Simulación numérica. Mediciones.



## Problema inverso. Ecuación de calor y unicidad del problema

### 1 Introducción

- Introducción y motivación del problema

### 2 Modelo directo 2D

- Ecuación de Fermi pencil-beam y ecuación de transporte radiativo
- Problema inverso. Ecuación de calor y unicidad del problema

### 3 Estabilidad LSFM 2D

- Estabilidad logarítmica para recuperar condición inicial en ecuación de calor
- Estabilidad Lipschitz para recuperar condición inicial en ecuación de calor
- Estabilidad para el problema inverso de LSFM 2D

### 4 Modelo directo 3D

- Modelo directo LSFM 3D. Cámara colimada.
- ¿Y el blur? Cámara no colimada

### 5 Red neuronal

- Arquitectura de la red neuronal para el caso 2D
- Problema 1
- Problema 2

### 6 Conclusiones

- Conclusiones y trabajo a futuro

## Problema inverso. Ecuación de calor y unicidad del problema

### Operador de mediciones.

- Se define el operador de mediciones

$$\mathcal{P} : \mu \in C_{pw}(\overline{\Omega}_{ad}) \rightarrow \mathcal{P}[\mu](s, y) := p(s, y), \quad \forall (s, y) \in \Omega_{ad}$$

## Problema inverso. Ecuación de calor y unicidad del problema

### Operador de mediciones.

- Se define el operador de mediciones

$$\mathcal{P} : \mu \in C_{pw}(\overline{\Omega}_{ad}) \rightarrow \mathcal{P}[\mu](s, y) := p(s, y), \quad \forall (s, y) \in \Omega_{ad}$$

- Interesa estudiar la invertibilidad de  $\mathcal{P}$ .

## Problema inverso. Ecuación de calor y unicidad del problema

### Operador de mediciones.

- Se define el operador de mediciones

$$\mathcal{P} : \mu \in C_{pw}(\overline{\Omega}_{ad}) \rightarrow \mathcal{P}[\mu](s, y) := p(s, y), \quad \forall (s, y) \in \Omega_{ad}$$

- Interesa estudiar la invertibilidad de  $\mathcal{P}$ .
- **Unicidad del problema:** Si suponemos que los parámetros  $\lambda, \psi$  y  $a$  son conocidos, ¿determinan las mediciones de forma unívoca a la fuente que las genera?

## Problema inverso. Ecuación de calor y unicidad del problema

### Operador de mediciones.

- Se define el operador de mediciones

$$\mathcal{P} : \mu \in C_{pw}(\overline{\Omega}_{ad}) \rightarrow \mathcal{P}[\mu](s, y) := p(s, y), \quad \forall (s, y) \in \Omega_{ad}$$

- Interesa estudiar la invertibilidad de  $\mathcal{P}$ .
- **Unicidad del problema:** Si suponemos que los parámetros  $\lambda, \psi$  y  $a$  son conocidos, ¿determinan las mediciones de forma unívoca a la fuente que las genera?
- **Estabilidad del problema:** ¿Pequeñas perturbaciones en las mediciones implican pequeñas perturbaciones en las fuentes respectivas?

## Problema inverso. Ecuación de calor y unicidad del problema

$\mu$  es parte de una condición inicial para la ecuación de calor en  $\mathbb{R}$ !

## Problema inverso. Ecuación de calor y unicidad del problema

$\mu$  es parte de una condición inicial para la ecuación de calor en  $\mathbb{R}$ !

- Sea  $s \in (s^-, s^+)$  fijo. Si se definen

$$\sigma(y) := \frac{1}{2}\alpha^2(s, y) = \frac{1}{2} \int_{x_y}^s (s - \tau)^2 \psi(\tau, y) d\tau$$

$$f(r) := \mu(s, r) \exp\left(-\int_r^{\infty} a(s, \tau) d\tau\right)$$

$$g(y) := \frac{1}{c} \mathcal{P}[\mu](s, y) \exp\left(\int_{x_y}^s \lambda(\tau, y) d\tau\right)$$

entonces  $g(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(r)}{\sqrt{4\pi\sigma(y)}} \exp\left(-\frac{(r-y)^2}{4\sigma(y)}\right), \quad \forall y \in Y_s$

## Problema inverso. Ecuación de calor y unicidad del problema

$\mu$  es parte de una condición inicial para la ecuación de calor en  $\mathbb{R}$ !

- Sea  $s \in (s^-, s^+)$  fijo. Si se definen

$$\sigma(y) := \frac{1}{2}\alpha^2(s, y) = \frac{1}{2} \int_{x_y}^s (s - \tau)^2 \psi(\tau, y) d\tau$$

$$f(r) := \mu(s, r) \exp\left(-\int_r^{\infty} a(s, \tau) d\tau\right)$$

$$g(y) := \frac{1}{c} \mathcal{P}[\mu](s, y) \exp\left(\int_{x_y}^s \lambda(\tau, y) d\tau\right)$$

entonces  $g(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(r)}{\sqrt{4\pi\sigma(y)}} \exp\left(-\frac{(r-y)^2}{4\sigma(y)}\right), \quad \forall y \in Y_s$

- El lado izquierdo  $g$  representa lo que es conocido, las mediciones.

## Problema inverso. Ecuación de calor y unicidad del problema

$\mu$  es parte de una condición inicial para la ecuación de calor en  $\mathbb{R}$ !

- Sea  $s \in (s^-, s^+)$  fijo. Si se definen

$$\sigma(y) := \frac{1}{2}\alpha^2(s, y) = \frac{1}{2} \int_{x_y}^s (s - \tau)^2 \psi(\tau, y) d\tau$$

$$f(r) := \mu(s, r) \exp\left(-\int_r^{\infty} a(s, \tau) d\tau\right)$$

$$g(y) := \frac{1}{c} \mathcal{P}[\mu](s, y) \exp\left(\int_{x_y}^s \lambda(\tau, y) d\tau\right)$$

entonces  $g(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(r)}{\sqrt{4\pi\sigma(y)}} \exp\left(-\frac{(r-y)^2}{4\sigma(y)}\right), \quad \forall y \in Y_s$

- El lado izquierdo  $g$  representa lo que es conocido, las mediciones.
- El lado derecho se parece a la solución a la ecuación de calor en  $\mathbb{R}$ !

## Problema inverso. Ecuación de calor y unicidad del problema

$\mu$  es parte de una condición inicial para la ecuación de calor en  $\mathbb{R}$ !

- Sea  $s \in (s^-, s^+)$  fijo. Si se definen

$$\sigma(y) := \frac{1}{2}\alpha^2(s, y) = \frac{1}{2} \int_{x_y}^s (s - \tau)^2 \psi(\tau, y) d\tau$$

$$f(r) := \mu(s, r) \exp\left(-\int_r^{\infty} a(s, \tau) d\tau\right)$$

$$g(y) := \frac{1}{c} \mathcal{P}[\mu](s, y) \exp\left(\int_{x_y}^s \lambda(\tau, y) d\tau\right)$$

entonces  $g(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(r)}{\sqrt{4\pi\sigma(y)}} \exp\left(-\frac{(r-y)^2}{4\sigma(y)}\right), \quad \forall y \in Y_s$

- El lado izquierdo  $g$  representa lo que es conocido, las mediciones.
- El lado derecho se parece a la solución a la ecuación de calor en  $\mathbb{R}$ !
- $f$  representa la condición inicial de la ecuación.

## Problema inverso. Ecuación de calor y unicidad del problema

$\mu$  es parte de una condición inicial para la ecuación de calor en  $\mathbb{R}$ !

- Sea  $s \in (s^-, s^+)$  fijo. Si se definen

$$\sigma(y) := \frac{1}{2}\alpha^2(s, y) = \frac{1}{2} \int_{x_y}^s (s - \tau)^2 \psi(\tau, y) d\tau$$

$$f(r) := \mu(s, r) \exp\left(-\int_r^{\infty} a(s, \tau) d\tau\right)$$

$$g(y) := \frac{1}{c} \mathcal{P}[\mu](s, y) \exp\left(\int_{x_y}^s \lambda(\tau, y) d\tau\right)$$

entonces  $g(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(r)}{\sqrt{4\pi\sigma(y)}} \exp\left(-\frac{(r-y)^2}{4\sigma(y)}\right), \quad \forall y \in Y_s$

- El lado izquierdo  $g$  representa lo que es conocido, las mediciones.
- El lado derecho se parece a la solución a la ecuación de calor en  $\mathbb{R}$ !
- $f$  representa la condición inicial de la ecuación.
- $\sigma(y)$  juega el rol de tiempo.

## Problema inverso. Ecuación de calor y unicidad del problema

- Se considera la siguiente ecuación de calor

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t - u_{yy} = 0, & (y, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ u(y, 0) = f(y), & \text{si } y \in Y_s, \\ u(y, 0) = 0, & \text{si } y \notin Y_s, \\ \lim_{|y| \rightarrow \infty} u(y, t) = 0, & \forall t > 0 \end{array} \right.$$

## Problema inverso. Ecuación de calor y unicidad del problema

- Se considera la siguiente ecuación de calor

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t - u_{yy} = 0, & (y, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ u(y, 0) = f(y), & \text{si } y \in Y_s, \\ u(y, 0) = 0, & \text{si } y \notin Y_s, \\ \lim_{|y| \rightarrow \infty} u(y, t) = 0, & \forall t > 0 \end{array} \right.$$

- $u(y, \sigma(y)) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(r)}{\sqrt{4\pi\sigma(y)}} \exp\left(-\frac{(y-r)^2}{4\sigma(y)}\right) dr = g(y), \quad \forall y \in Y_s$

## Problema inverso. Ecuación de calor y unicidad del problema

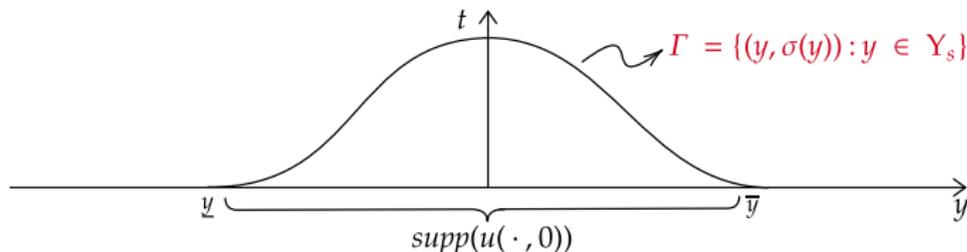
- Se considera la siguiente ecuación de calor

$$\begin{cases} u_t - u_{yy} = 0, & (y, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ u(y, 0) = f(y), & \text{si } y \in Y_s, \\ u(y, 0) = 0, & \text{si } y \notin Y_s, \\ \lim_{|y| \rightarrow \infty} u(y, t) = 0, & \forall t > 0 \end{cases}$$

- $u(y, \sigma(y)) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(r)}{\sqrt{4\pi\sigma(y)}} \exp\left(-\frac{(y-r)^2}{4\sigma(y)}\right) dr = g(y), \quad \forall y \in Y_s$

- Se tienen mediciones de  $u$  en la curva

$$\Gamma := \{(y, \sigma(y)) : y \in Y_s\} \cup \{(y, 0) : y \notin Y_s\} \subset \mathbb{R} \times [0, +\infty).$$



## Problema inverso. Ecuación de calor y unicidad del problema

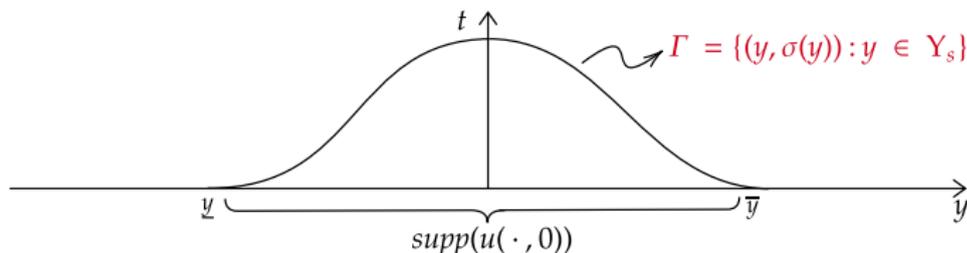
- Se considera la siguiente ecuación de calor

$$\begin{cases} u_t - u_{yy} = 0, & (y, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ u(y, 0) = f(y), & \text{si } y \in Y_s, \\ u(y, 0) = 0, & \text{si } y \notin Y_s, \\ \lim_{|y| \rightarrow \infty} u(y, t) = 0, & \forall t > 0 \end{cases}$$

- $u(y, \sigma(y)) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(r)}{\sqrt{4\pi\sigma(y)}} \exp\left(-\frac{(y-r)^2}{4\sigma(y)}\right) dr = g(y), \quad \forall y \in Y_s$

- Se tienen mediciones de  $u$  en la curva

$$\Gamma := \{(y, \sigma(y)) : y \in Y_s\} \cup \{(y, 0) : y \notin Y_s\} \subset \mathbb{R} \times [0, +\infty).$$



- Por linealidad, la unicidad se reduce a probar que  $\mu(s, \cdot) \equiv 0$  si  $g \equiv 0$ .

## Problema inverso. Ecuación de calor y unicidad del problema

### Teorema (Unicidad del problema inverso)

Sea  $s \in (s^-, s^+)$  fijo. Si  $\mathcal{P}[\mu](s, h) = 0$  para todo  $h \in Y_s$ , entonces  $\mu(s, y) = 0$  para todo  $y \in Y_s$ .

### Teorema (Unicidad para ecuación de calor)

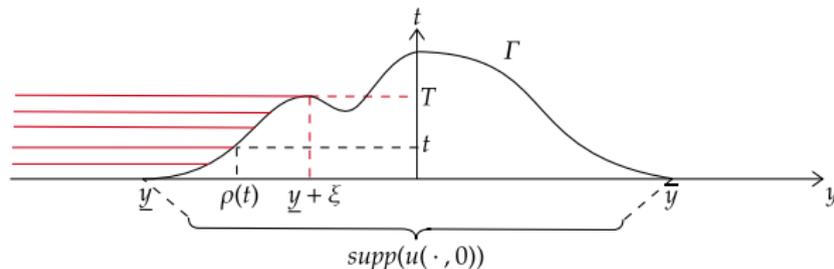
Sea  $\sigma \in C_c^1(\mathbb{R})$  y sea  $\Gamma = \{(y, t) : t = \sigma(y)\} \subset \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ . Sean  $\underline{y} := \inf(\text{supp}(\sigma))$  e  $\bar{y} := \sup(\text{supp}(\sigma))$ . Supongamos que existe  $\xi > 0$  tal que  $\sigma'(y) > 0$  en  $(\underline{y}, \underline{y} + \xi)$ . Sea  $u$  solución a la ecuación

$$\begin{cases} u_t - u_{yy} = 0, & (y, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(y, t) \rightarrow 0, & \text{cuando } |y| \rightarrow \infty, \forall t > 0 \end{cases}$$

tal que  $\text{supp}(u(\cdot, 0)) \subset \text{supp}(\sigma)$  y  $u|_{\Gamma} \equiv 0$ . Entonces  $u \equiv 0$  en todo  $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ . En particular  $u(y, 0) = 0, \forall y \in \mathbb{R}$ .

## Problema inverso. Ecuación de calor y unicidad del problema

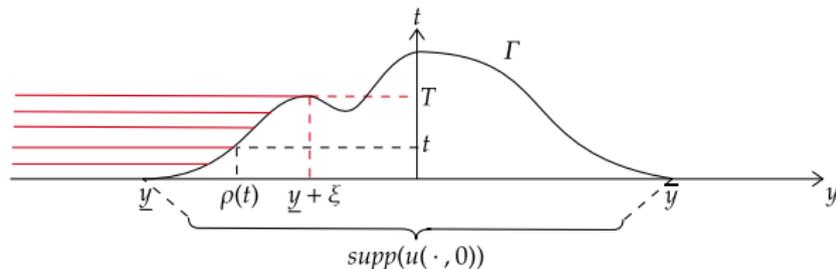
### Sketch demostración:



- Sea  $T = \sigma(\underline{y} + \xi)$ . Existe la inversa  $\rho(t) = \sigma^{-1}(t) \in C^1(0, T) \cap C[0, T]$ .  
 $\rho(T) := \underline{y} + \xi$  y  $\rho(0) = \underline{y}$ .

## Problema inverso. Ecuación de calor y unicidad del problema

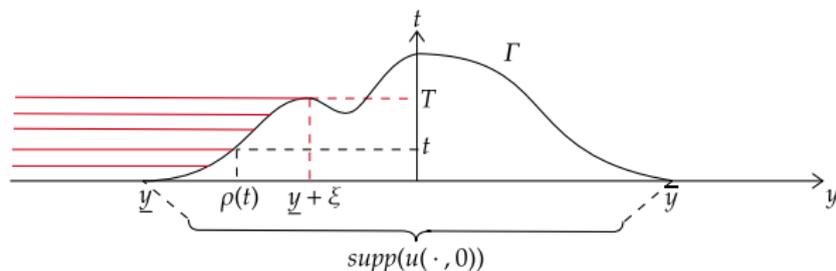
### Sketch demostración:



- Sea  $T = \sigma(\underline{y} + \xi)$ . Existe la inversa  $\rho(t) = \sigma^{-1}(t) \in C^1(0, T) \cap C[0, T]$ .  
 $\rho(T) := \underline{y} + \xi$  y  $\rho(0) = \underline{y}$ .
- $$I(t) := \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\rho(t)} |u(y, t)|^2 dy.$$

## Problema inverso. Ecuación de calor y unicidad del problema

### Sketch demostración:



- Sea  $T = \sigma(\underline{y} + \xi)$ . Existe la inversa  $\rho(t) = \sigma^{-1}(t) \in C^1(0, T) \cap C[0, T]$ .  
 $\rho(T) := \underline{y} + \xi$  y  $\rho(0) = \underline{y}$ .
- $I(t) := \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\rho(t)} |u(y, t)|^2 dy$ .
- $I(0) = 0$  e  $I(t)$  es decreciente. En conclusión  $I(t) \equiv 0$ .



# Estabilidad logarítmica para recuperar condición inicial en ecuación de calor

## 1 Introducción

- Introducción y motivación del problema

## 2 Modelo directo 2D

- Ecuación de Fermi pencil-beam y ecuación de transporte radiativo
- Problema inverso. Ecuación de calor y unicidad del problema

## 3 Estabilidad LSFM 2D

- Estabilidad logarítmica para recuperar condición inicial en ecuación de calor
- Estabilidad Lipschitz para recuperar condición inicial en ecuación de calor
- Estabilidad para el problema inverso de LSFM 2D

## 4 Modelo directo 3D

- Modelo directo LSFM 3D. Cámara colimada.
- ¿Y el blur? Cámara no colimada

## 5 Red neuronal

- Arquitectura de la red neuronal para el caso 2D
- Problema 1
- Problema 2

## 6 Conclusiones

- Conclusiones y trabajo a futuro

## Estabilidad logarítmica para recuperar condición inicial en ecuación de calor

Teorema (Estabilidad condicional logarítmica para ecuación de calor en  $\mathbb{R}^n$ )

Sea  $0 < \beta < 1$ . Sea  $u$  solución a la ecuación de calor en  $\mathbb{R}^n$  con  $u_0 \in \mathcal{A} := \{a \in H^{2\beta}(\mathbb{R}^n) : \|a\|_{H^{2\beta}(\mathbb{R}^n)} \leq M\}$ . Sean  $0 \leq \tau < T$  y  $\omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto de complemento acotado tal que  $\omega \times (\tau, T)$  es el conjunto de observación. Si  $\|u\|_{L^2(\omega \times (\tau, T))} < 1$ , entonces para todo  $0 < \varepsilon < (T - \tau)/2$ ,  $\delta > 0$  y  $\theta \in (\tau + \varepsilon, T - \varepsilon)$  existen constantes  $\kappa = \kappa(\beta) \in (0, 1)$  y  $C = C(\varepsilon, \delta, M, \theta) > 0$  tales que

$$\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \left( -\log \|u\|_{L^2(\omega \times (\tau, T))} \right)^{-\kappa}$$

## Estabilidad logarítmica para recuperar condición inicial en ecuación de calor

Teorema (Estabilidad condicional logarítmica para ecuación de calor en  $\mathbb{R}^n$ )

Sea  $0 < \beta < 1$ . Sea  $u$  solución a la ecuación de calor en  $\mathbb{R}^n$  con  $u_0 \in \mathcal{A} := \{a \in H^{2\beta}(\mathbb{R}^n) : \|a\|_{H^{2\beta}(\mathbb{R}^n)} \leq M\}$ . Sean  $0 \leq \tau < T$  y  $\omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto de complemento acotado tal que  $\omega \times (\tau, T)$  es el conjunto de observación. Si  $\|u\|_{L^2(\omega \times (\tau, T))} < 1$ , entonces para todo  $0 < \varepsilon < (T - \tau)/2$ ,  $\delta > 0$  y  $\theta \in (\tau + \varepsilon, T - \varepsilon)$  existen constantes  $\kappa = \kappa(\beta) \in (0, 1)$  y  $C = C(\varepsilon, \delta, M, \theta) > 0$  tales que

$$\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \left( -\log \|u\|_{L^2(\omega \times (\tau, T))} \right)^{-\kappa}$$

- Se estima  $\|u\|_{C([\tau+\varepsilon, T-\varepsilon]; H^{-1}(\mathbb{R}^n))} \leq C \|u\|_{L^2(\omega \times (\tau, T))}$ .

## Estabilidad logarítmica para recuperar condición inicial en ecuación de calor

Teorema (Estabilidad condicional logarítmica para ecuación de calor en  $\mathbb{R}^n$ )

Sea  $0 < \beta < 1$ . Sea  $u$  solución a la ecuación de calor en  $\mathbb{R}^n$  con  $u_0 \in \mathcal{A} := \{a \in H^{2\beta}(\mathbb{R}^n) : \|a\|_{H^{2\beta}(\mathbb{R}^n)} \leq M\}$ . Sean  $0 \leq \tau < T$  y  $\omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto de complemento acotado tal que  $\omega \times (\tau, T)$  es el conjunto de observación. Si  $\|u\|_{L^2(\omega \times (\tau, T))} < 1$ , entonces para todo  $0 < \varepsilon < (T - \tau)/2$ ,  $\delta > 0$  y  $\theta \in (\tau + \varepsilon, T - \varepsilon)$  existen constantes  $\kappa = \kappa(\beta) \in (0, 1)$  y  $C = C(\varepsilon, \delta, M, \theta) > 0$  tales que

$$\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \left( -\log \|u\|_{L^2(\omega \times (\tau, T))} \right)^{-\kappa}$$

- Se estima  $\|u\|_{C([ \tau + \varepsilon, T - \varepsilon ]; H^{-1}(\mathbb{R}^n))} \leq C \|u\|_{L^2(\omega \times (\tau, T))}$ .
- Para  $\delta > 0$ , se estima  $\|u\|_{C([ \tau + \varepsilon, T - \varepsilon ]; H^{2\delta}(\mathbb{R}^n))} \leq C$ .

## Estabilidad logarítmica para recuperar condición inicial en ecuación de calor

Teorema (Estabilidad condicional logarítmica para ecuación de calor en  $\mathbb{R}^n$ )

Sea  $0 < \beta < 1$ . Sea  $u$  solución a la ecuación de calor en  $\mathbb{R}^n$  con  $u_0 \in \mathcal{A} := \{a \in H^{2\beta}(\mathbb{R}^n) : \|a\|_{H^{2\beta}(\mathbb{R}^n)} \leq M\}$ . Sean  $0 \leq \tau < T$  y  $\omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto de complemento acotado tal que  $\omega \times (\tau, T)$  es el conjunto de observación. Si  $\|u\|_{L^2(\omega \times (\tau, T))} < 1$ , entonces para todo  $0 < \varepsilon < (T - \tau)/2$ ,  $\delta > 0$  y  $\theta \in (\tau + \varepsilon, T - \varepsilon)$  existen constantes  $\kappa = \kappa(\beta) \in (0, 1)$  y  $C = C(\varepsilon, \delta, M, \theta) > 0$  tales que

$$\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \left( -\log \|u\|_{L^2(\omega \times (\tau, T))} \right)^{-\kappa}$$

- Se estima  $\|u\|_{C([\tau+\varepsilon, T-\varepsilon]; H^{-1}(\mathbb{R}^n))} \leq C \|u\|_{L^2(\omega \times (\tau, T))}$ .
- Para  $\delta > 0$ , se estima  $\|u\|_{C([\tau+\varepsilon, T-\varepsilon]; H^{2\delta}(\mathbb{R}^n))} \leq C$ .
- Por interpolación de espacios de Sobolev, se estima

$$\|u\|_{C([\tau+\varepsilon, T-\varepsilon]; L^2(\mathbb{R}^n))} \leq C \|u\|_{L^2(\omega \times (\tau, T))}^{\frac{2\delta}{2\delta+1}}$$

## Estabilidad logarítmica para recuperar condición inicial en ecuación de calor

Teorema (Estabilidad condicional logarítmica para ecuación de calor en  $\mathbb{R}^n$ )

Sea  $0 < \beta < 1$ . Sea  $u$  solución a la ecuación de calor en  $\mathbb{R}^n$  con  $u_0 \in \mathcal{A} := \{a \in H^{2\beta}(\mathbb{R}^n) : \|a\|_{H^{2\beta}(\mathbb{R}^n)} \leq M\}$ . Sean  $0 \leq \tau < T$  y  $\omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto de complemento acotado tal que  $\omega \times (\tau, T)$  es el conjunto de observación. Si  $\|u\|_{L^2(\omega \times (\tau, T))} < 1$ , entonces para todo  $0 < \varepsilon < (T - \tau)/2$ ,  $\delta > 0$  y  $\theta \in (\tau + \varepsilon, T - \varepsilon)$  existen constantes  $\kappa = \kappa(\beta) \in (0, 1)$  y  $C = C(\varepsilon, \delta, M, \theta) > 0$  tales que

$$\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \left( -\log \|u\|_{L^2(\omega \times (\tau, T))} \right)^{-\kappa}$$

- Se estima  $\|u\|_{C([\tau+\varepsilon, T-\varepsilon]; H^{-1}(\mathbb{R}^n))} \leq C \|u\|_{L^2(\omega \times (\tau, T))}$ .
- Para  $\delta > 0$ , se estima  $\|u\|_{C([\tau+\varepsilon, T-\varepsilon]; H^{2\delta}(\mathbb{R}^n))} \leq C$ .
- Por interpolación de espacios de Sobolev, se estima

$$\|u\|_{C([\tau+\varepsilon, T-\varepsilon]; L^2(\mathbb{R}^n))} \leq C \|u\|_{L^2(\omega \times (\tau, T))}^{\frac{2\delta}{2\delta+1}}$$

- Usando que la función  $t \rightarrow \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$  es log-convexa se puede llegar al tiempo inicial.

## Estabilidad logarítmica para recuperar condición inicial en ecuación de calor

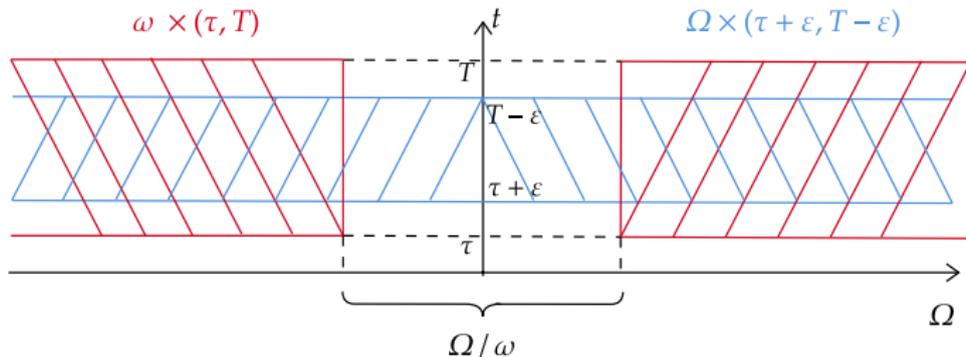
## Teorema (Estimación de energía)

Sea  $\Omega$  un subconjunto no acotado de  $\mathbb{R}^n$  de clase  $C^2$ . Sea  $\omega \subseteq \Omega$  tal que  $\Omega \setminus \omega$  es acotado. Sean  $\tau, T$  constantes tales que  $0 \leq \tau < T$ . Luego, para todo  $0 < \varepsilon < (T - \tau)/2$  existe  $C_\varepsilon$  tal que

$$\|u_t\|_{L^2(\tau+\varepsilon, T-\varepsilon; H^{-1}(\Omega))}^2 + \|u\|_{L^2(\tau+\varepsilon, T-\varepsilon; H^1(\Omega))}^2 \leq C_\varepsilon \|u\|_{L^2(\omega \times (\tau, T))}^2$$

En particular

$$\|u\|_{L^2(\tau+\varepsilon, T-\varepsilon; L^2(\Omega))}^2 \leq C_\varepsilon \|u\|_{L^2(\omega \times (\tau, T))}^2$$

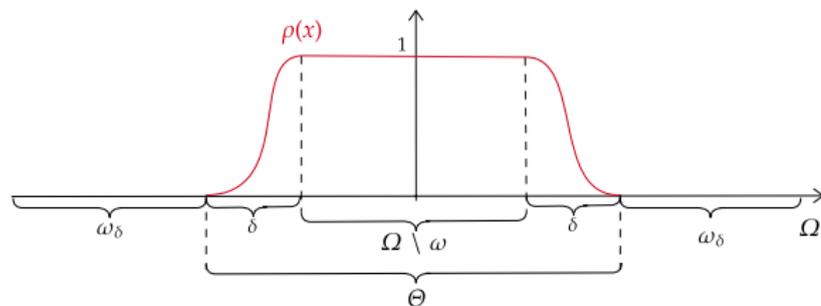


## Estabilidad logarítmica para recuperar condición inicial en ecuación de calor

## Sketch demostración:

- Para  $\delta > 0$  se introduce la función cut-off  $\rho \in C^\infty(\Omega)$  :

$$\begin{cases} \rho = 1 & \text{en } \Omega \setminus \omega \\ \rho = 0 & \text{en } \omega_\delta = \{x \in \omega; d(x, \partial\omega) > \delta\} \\ \rho \in (0, 1] & \text{en } \omega \setminus \omega_\delta \end{cases}$$

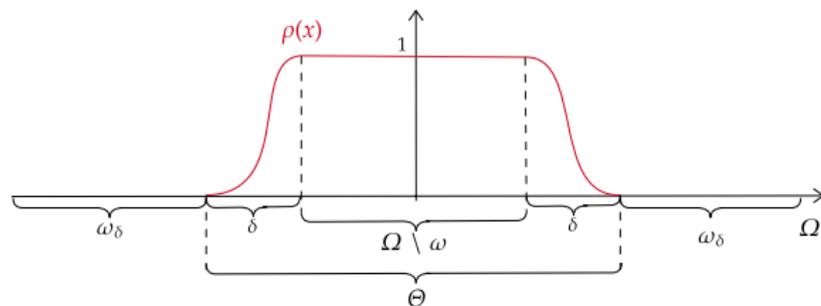


## Estabilidad logarítmica para recuperar condición inicial en ecuación de calor

## Sketch demostración:

- Para  $\delta > 0$  se introduce la función cut-off  $\rho \in C^\infty(\Omega)$  :

$$\begin{cases} \rho = 1 & \text{en } \Omega \setminus \omega \\ \rho = 0 & \text{en } \omega_\delta = \{x \in \omega; d(x, \partial\omega) > \delta\} \\ \rho \in (0, 1] & \text{en } \omega \setminus \omega_\delta \end{cases}$$



- Considerando  $\theta = \rho u$  y  $g = -\Delta \rho u - 2\nabla \rho \nabla u$  entonces

$$\begin{cases} \theta_t - \Delta \theta = g & \text{en } \Theta \times (0, T) \\ \theta = 0 & \text{sobre } \partial\Theta \times (0, T) \\ \theta(x, 0) = \rho u_0(x) & \text{en } \Theta \end{cases}$$

## Estabilidad logarítmica para recuperar condición inicial en ecuación de calor

- La desigualdad de Carleman para ecuaciones parabólicas sobre  $\theta$  dice que

$$\int_{\tau}^T \int_{\Theta} \left( \frac{1}{s\xi} |\nabla\theta|^2 + s\xi |\theta|^2 \right) e^{2s\alpha} dxdt \leq C_1 \left( \|ge^{s\alpha}\|_{L^2(\tau, T; H^{-1}(\Theta))}^2 + \int_{\tau}^T \int_{\Theta \cap \omega} s\xi |\theta|^2 e^{2s\alpha} dxdt \right)$$

con

$$\xi(x, t) = \frac{e^{\lambda\psi(x)}}{(t-\tau)(T-t)}, \quad \alpha(x, t) = \frac{e^{\lambda\psi(x)} - e^{2\lambda\|\psi(x)\|_{C(\bar{\Theta})}}}{(t-\tau)(T-t)}$$

## Estabilidad logarítmica para recuperar condición inicial en ecuación de calor

- La desigualdad de Carleman para ecuaciones parabólicas sobre  $\theta$  dice que

$$\int_{\tau}^T \int_{\Theta} \left( \frac{1}{s\xi} |\nabla\theta|^2 + s\xi |\theta|^2 \right) e^{2s\alpha} dxdt \leq C_1 \left( \|ge^{s\alpha}\|_{L^2(\tau, T; H^{-1}(\Theta))}^2 + \int_{\tau}^T \int_{\Theta \cap \omega} s\xi |\theta|^2 e^{2s\alpha} dxdt \right)$$

con

$$\xi(x, t) = \frac{e^{\lambda\psi(x)}}{(t-\tau)(T-t)}, \quad \alpha(x, t) = \frac{e^{\lambda\psi(x)} - e^{2\lambda\|\psi(x)\|_{C(\bar{\Theta})}}}{(t-\tau)(T-t)}$$

- Estimando ambos lados de la desigualdad se concluye

$$\|u\|_{L^2(\tau+\varepsilon, T-\varepsilon; L^2(\Omega))} = \int_{\tau+\varepsilon}^{T-\varepsilon} \int_{\Omega} |u|^2 \leq C \|u\|_{L^2(\omega \times (\tau, T))}^2$$

# Estabilidad Lipschitz para recuperar condición inicial en ecuación de calor

- 1 **Introducción**
  - Introducción y motivación del problema
- 2 **Modelo directo 2D**
  - Ecuación de Fermi pencil-beam y ecuación de transporte radiativo
  - Problema inverso. Ecuación de calor y unicidad del problema
- 3 **Estabilidad LSFM 2D**
  - Estabilidad logarítmica para recuperar condición inicial en ecuación de calor
  - **Estabilidad Lipschitz para recuperar condición inicial en ecuación de calor**
  - Estabilidad para el problema inverso de LSFM 2D
- 4 **Modelo directo 3D**
  - Modelo directo LSFM 3D. Cámara colimada.
  - ¿Y el blur? Cámara no colimada
- 5 **Red neuronal**
  - Arquitectura de la red neuronal para el caso 2D
  - Problema 1
  - Problema 2
- 6 **Conclusiones**
  - Conclusiones y trabajo a futuro

## Estabilidad Lipschitz para recuperar condición inicial en ecuación de calor

Teorema (Estabilidad Lipschitz para ecuación de calor en  $\mathbb{R}^n$ )

Sean  $0 < t_1 < t_2$  y  $R > 0$ . Sea  $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\text{supp}(u_0) \subset B := B(0, R)$ . Existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{L^2(2B \times (t_1, t_2))}$$

## Lema

Si  $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $u_0 \geq 0$  y  $\text{supp}(u_0) \subset B := B(0, R)$  la bola centrada en el origen y de radio  $R$  para algún  $R > 0$ . Entonces, para  $t > 0$  existe una constante  $C = C(R, t)$  tal que

$$\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u(\cdot, t)\|_{L^2(2B)}$$

## Estabilidad Lipschitz para recuperar condición inicial en ecuación de calor

## Corolario

Sea  $\omega \subseteq \mathbb{R}^n$  tal que  $\mathbb{R}^n \setminus \omega$  es acotado. Sean  $0 \leq \tau < T$ ,  $0 < \varepsilon < (T - \tau)/2$ ,  $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$  con  $\text{supp}(u_0) \subseteq B$  y  $u$  la solución a la ecuación de calor en  $\mathbb{R}^n$  con condición inicial  $u_0$ . Entonces, existe una constante  $C = C(\varepsilon) > 0$  tal que

$$\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{L^2(\omega \times (\tau, T))}$$

## Estabilidad para el problema inverso de LSFM 2D

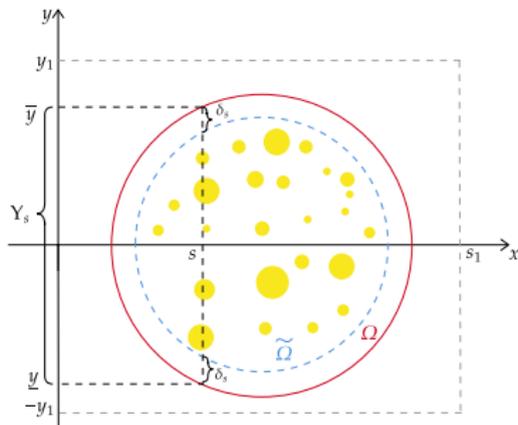
- 1 Introducción
  - Introducción y motivación del problema
- 2 Modelo directo 2D
  - Ecuación de Fermi pencil-beam y ecuación de transporte radiativo
  - Problema inverso. Ecuación de calor y unicidad del problema
- 3 Estabilidad LSFM 2D
  - Estabilidad logarítmica para recuperar condición inicial en ecuación de calor
  - Estabilidad Lipschitz para recuperar condición inicial en ecuación de calor
  - **Estabilidad para el problema inverso de LSFM 2D**
- 4 Modelo directo 3D
  - Modelo directo LSFM 3D. Cámara colimada.
  - ¿Y el blur? Cámara no colimada
- 5 Red neuronal
  - Arquitectura de la red neuronal para el caso 2D
  - Problema 1
  - Problema 2
- 6 Conclusiones
  - Conclusiones y trabajo a futuro

## Estabilidad para el problema inverso de LSFM 2D

## Teorema (Estabilidad LSFM)

Sea  $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ . Se define el conjunto de fuentes admisibles como  $\mathcal{B}(\tilde{\Omega}) := \{\mu \in L^1(\mathbb{R}^2) : \text{supp}(\mu) \subseteq \tilde{\Omega} \text{ y } \mu(s, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}), \forall s \in (s^-, s^+)\}$ . Sea  $s \in (s^-, s^+)$  fijo y  $f(y) := \mu(s, y) e^{-\int_y^\infty a(s, \tau) d\tau}$  con  $\mu \in \mathcal{B}(\tilde{\Omega})$ . Entonces existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C \|(|g_L| + |g_R|)\|_{L^1(0, T)}$$



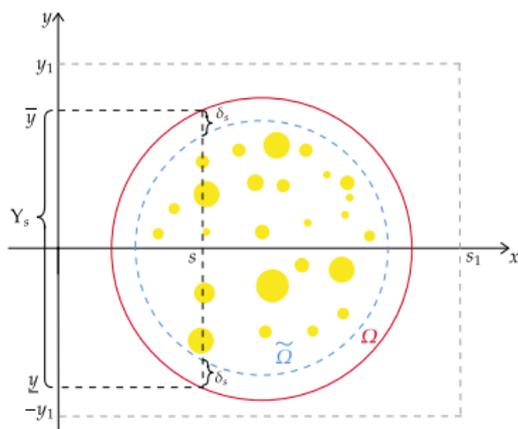


## Estabilidad para el problema inverso de LSFM 2D

## Teorema

Supongamos que  $\mu \in \mathcal{B}(\tilde{\Omega})$ . Luego, para un  $s \in (s^-, s^+)$  fijo existe  $\delta_s > 0$  tal que  $f(y) \equiv 0$  en  $(\underline{y}, \underline{y} + \delta_s) \cup (\bar{y} - \delta_s, \bar{y})$ , es decir,  $\text{supp}(f) \subsetneq Y_s$ . Sea  $u$  solución a la ecuación de calor con condición inicial  $u_0 = f$  y sean  $0 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq T$ . Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  entonces

$$\frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{-\infty}^{\rho_L(\tau)} |u(y, \tau)|^2 dy d\tau \leq C(s, \delta_s) \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} (\tau_2 - \tau_1) \int_0^{\tau_2} |g_L(t)| dt$$



## Estabilidad para el problema inverso de LSFM 2D

## Sketch demostración:

- Se estima  $dl_L/dt$ :

$$\frac{dl_L}{dt}(t) \leq \frac{1}{2}g_L^2(t)\rho_L'(t) + g_L(t)u_y(\rho_L(t), t) = g_L(t) \left( \frac{1}{2}g_L(t)\rho_L'(t) + u_y(\rho_L(t), t) \right)$$



## Estabilidad para el problema inverso de LSFM 2D

## Sketch demostración:

- Se estima  $dl_L/dt$ :

$$\frac{dl_L}{dt}(t) \leq \frac{1}{2}g_L^2(t)\rho_L'(t) + g_L(t)u_y(\rho_L(t), t) = g_L(t) \left( \frac{1}{2}g_L(t)\rho_L'(t) + u_y(\rho_L(t), t) \right)$$

- $|g_L(t)\rho_L'(t)| \leq C(s, \delta_s)\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$  y  $|u_y(\rho_L(t), t)| \leq C(s, \delta_s)\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$



## Estabilidad para el problema inverso de LSFM 2D

## Sketch demostración:

- Se estima  $dl_L/dt$ :

$$\frac{dl_L}{dt}(t) \leq \frac{1}{2}g_L^2(t)\rho_L'(t) + g_L(t)u_y(\rho_L(t), t) = g_L(t) \left( \frac{1}{2}g_L(t)\rho_L'(t) + u_y(\rho_L(t), t) \right)$$

- $|g_L(t)\rho_L'(t)| \leq C(s, \delta_s)\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$  y  $|u_y(\rho_L(t), t)| \leq C(s, \delta_s)\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$

- $$\begin{aligned} \left| \frac{g_L(\sigma(y))}{\sigma'(y)} \right| &\leq C \frac{\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(r)|}{(4\pi\sigma(y))^{1/2}} \exp\left(-\frac{(y-r)^2}{4\sigma(y)}\right) dr}{(s-\gamma(y))^2}, \quad y \in (y, y + \xi_1) \\ &\leq C \int_y^{\bar{y}} \frac{|f(r)|}{(s-\gamma(y))^{7/2}} \exp\left(-\frac{(y-r)^2}{C_2(s-\gamma(y))^3}\right) dr \\ &\leq C \int_{y+\delta_s}^{\bar{y}-\delta_s} \frac{|f(r)|}{(s-\gamma(y))^{7/2}} \exp\left(-\frac{(y-r)^2}{C_2(s-\gamma(y))^3}\right) dr \end{aligned}$$

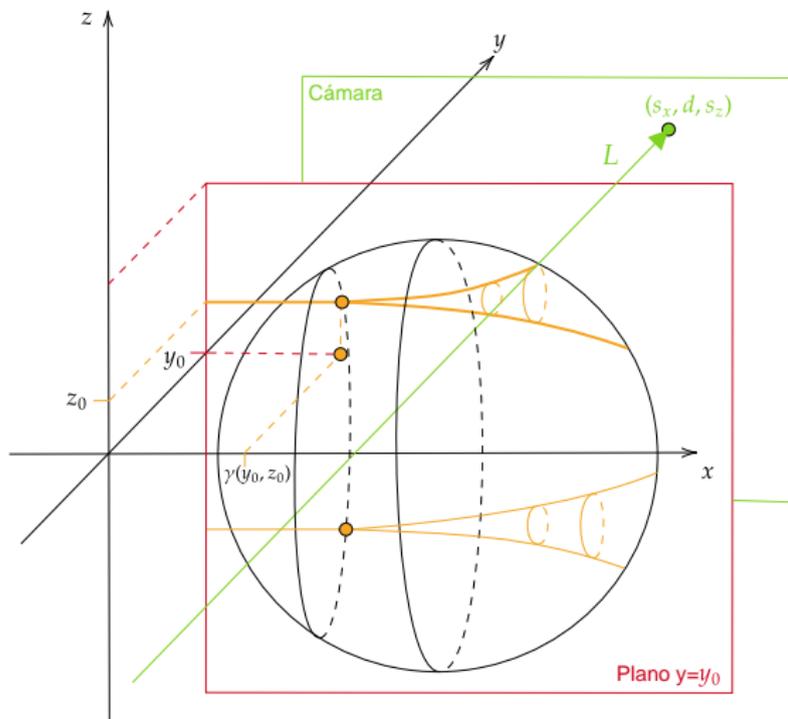


## Modelo directo LSFM 3D. Cámara colimada.

- 1 Introducción
  - Introducción y motivación del problema
- 2 Modelo directo 2D
  - Ecuación de Fermi pencil-beam y ecuación de transporte radiativo
  - Problema inverso. Ecuación de calor y unicidad del problema
- 3 Estabilidad LSFM 2D
  - Estabilidad logarítmica para recuperar condición inicial en ecuación de calor
  - Estabilidad Lipschitz para recuperar condición inicial en ecuación de calor
  - Estabilidad para el problema inverso de LSFM 2D
- 4 Modelo directo 3D
  - Modelo directo LSFM 3D. Cámara colimada.
  - ¿Y el blur? Cámara no colimada
- 5 Red neuronal
  - Arquitectura de la red neuronal para el caso 2D
  - Problema 1
  - Problema 2
- 6 Conclusiones
  - Conclusiones y trabajo a futuro

## Modelo directo LSFM 3D. Cámara colimada.

## Modelo directo LSFM 3D. Cámara colimada.



## Modelo directo LSFM 3D. Cámara colimada.

- En la fase de iluminación, se consideran las desviaciones en  $y$  y en  $z$  independientes, luego

$$u_{y_0, z_0}(x, y, z, \theta_y, \theta_z) = u_{y_0}(x, y, \theta_y) \cdot u_{z_0}(x, z, \theta_z)$$

## Modelo directo LSFM 3D. Cámara colimada.

- En la fase de iluminación, se consideran las desviaciones en  $y$  y en  $z$  independientes, luego

$$u_{y_0, z_0}(x, y, z, \theta_y, \theta_z) = u_{y_0}(x, y, \theta_y) \cdot u_{z_0}(x, z, \theta_z)$$

- La distribución de fotones en el punto  $(x, y, z)$  es entonces

$$v_{y_0, z_0}(x, y, z) = \exp\left(-\int_{\gamma(y_0, z_0)}^x \lambda(\tau, y_0, z_0) d\tau\right) \frac{1}{4\pi\sigma(x, y_0, z_0)} \exp\left(-\frac{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}{4\sigma(x, y_0, z_0)}\right)$$

## Modelo directo LSFM 3D. Cámara colimada.

- En la fase de iluminación, se consideran las desviaciones en  $y$  y en  $z$  independientes, luego

$$u_{y_0, z_0}(x, y, z, \theta_y, \theta_z) = u_{y_0}(x, y, \theta_y) \cdot u_{z_0}(x, z, \theta_z)$$

- La distribución de fotones en el punto  $(x, y, z)$  es entonces

$$v_{y_0, z_0}(x, y, z) = \exp\left(-\int_{\gamma(y_0, z_0)}^x \lambda(\tau, y_0, z_0) d\tau\right) \frac{1}{4\pi\sigma(x, y_0, z_0)} \exp\left(-\frac{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}{4\sigma(x, y_0, z_0)}\right)$$

- Integrar sobre  $z_0$  entrega la iluminación sobre todo el plano:

$$v_{y_0}(x, y, z) = \int_{\bar{z}} \exp\left(-\int_{\gamma(y_0, z_0)}^x \lambda(\tau, y_0, z_0) d\tau\right) \frac{1}{4\pi\sigma(x, y_0, z_0)} \exp\left(-\frac{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}{4\sigma(x, y_0, z_0)}\right) dz_0$$

## Modelo directo LSFM 3D. Cámara colimada.

- En la fase de iluminación, se consideran las desviaciones en  $y$  y en  $z$  independientes, luego

$$u_{y_0, z_0}(x, y, z, \theta_y, \theta_z) = u_{y_0}(x, y, \theta_y) \cdot u_{z_0}(x, z, \theta_z)$$

- La distribución de fotones en el punto  $(x, y, z)$  es entonces

$$v_{y_0, z_0}(x, y, z) = \exp\left(-\int_{\gamma(y_0, z_0)}^x \lambda(\tau, y_0, z_0) d\tau\right) \frac{1}{4\pi\sigma(x, y_0, z_0)} \exp\left(-\frac{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}{4\sigma(x, y_0, z_0)}\right)$$

- Integrar sobre  $z_0$  entrega la iluminación sobre todo el plano:

$$v_{y_0}(x, y, z) = \int_{\bar{z}} \exp\left(-\int_{\gamma(y_0, z_0)}^x \lambda(\tau, y_0, z_0) d\tau\right) \frac{1}{4\pi\sigma(x, y_0, z_0)} \exp\left(-\frac{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}{4\sigma(x, y_0, z_0)}\right) dz_0$$

- La fuente fluorescente es entonces

$$w_{y_0}(x, y, z) = c \cdot v_{y_0}(x, y, z) \cdot \mu(x, y, z)$$

## Modelo directo LSFM 3D. Cámara colimada.

- La fase de proyección es nuevamente una integral de línea atenuada:

$$\begin{aligned}
 p_{y_0}(s_x, s_z) &= \int_{\mathbb{R}} w_{y_0}(s_x, r, s_z) \exp\left(-\int_r^{\infty} a(s_x, \tau, s_z) d\tau\right) dr \\
 &= c \int_z^{\bar{z}} \frac{e^{-\int_{\gamma(y_0, z_0)}^{\gamma(s_x)} \lambda(\tau, y_0, z_0) d\tau}}{\sqrt{4\pi\sigma(s_x, y_0, z_0)}} \exp\left(-\frac{(s_z - z_0)^2}{4\sigma(s_x, y_0, z_0)}\right) \cdot \\
 &\quad \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(s_x, r, s_z) e^{-\int_r^{\infty} a(s_x, \tau, s_z) d\tau}}{\sqrt{4\pi\sigma(s_x, y_0, z_0)}} \exp\left(-\frac{(y_0 - r)^2}{4\sigma(s_x, y_0, z_0)}\right) dr dz_0
 \end{aligned}$$

## Modelo directo LSFM 3D. Cámara colimada.

- La fase de proyección es nuevamente una integral de línea atenuada:

$$\begin{aligned}
 p_{y_0}(s_x, s_z) &= \int_{\mathbb{R}} w_{y_0}(s_x, r, s_z) \exp\left(-\int_r^{\infty} a(s_x, \tau, s_z) d\tau\right) dr \\
 &= c \int_z^{\bar{z}} \frac{e^{-\int_{\gamma(y_0, z_0)}^{s_x} \lambda(\tau, y_0, z_0) d\tau}}{\sqrt{4\pi\sigma(s_x, y_0, z_0)}} \exp\left(-\frac{(s_z - z_0)^2}{4\sigma(s_x, y_0, z_0)}\right) \\
 &\quad \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu(s_x, r, s_z) e^{-\int_r^{\infty} a(s_x, \tau, s_z) d\tau}}{\sqrt{4\pi\sigma(s_x, y_0, z_0)}} \exp\left(-\frac{(y_0 - r)^2}{4\sigma(s_x, y_0, z_0)}\right) dr dz_0
 \end{aligned}$$

- Fijando el píxel  $(s_x, s_z)$ , entonces la medición con  $y_0$  como variable queda

$$p(y_0) = \int_z^{\bar{z}} \alpha(s_z, y_0, z_0) u(y_0, \sigma(s_x, y_0, z_0)) dz_0$$

## Modelo directo LSFM 3D. Cámara colimada.

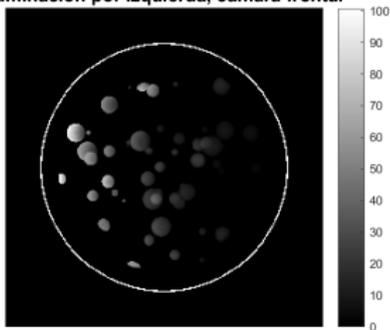
## Modelo directo LSFM 3D. Cámara colimada.

	Google Colab Python (Tensorflow)			Leftraru Matlab
	CPU [s]	GPU [s]	TPU [s]	CPU, 40 cores [s]
N=128	826	11.20	91.54	59.2
N=180	4608	32.47	458.53	265
N=256	-	-	-	1455.2

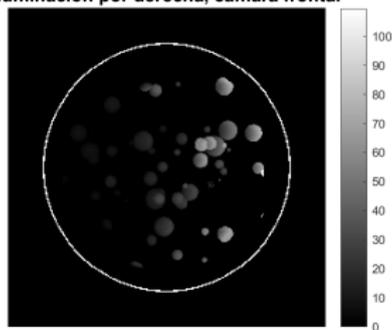
**Cuadro:** El tiempo mostrado en segundos es el promedio del tiempo de realización de 10 simulaciones.

# Modelo directo LSFM 3D. Cámara colimada.

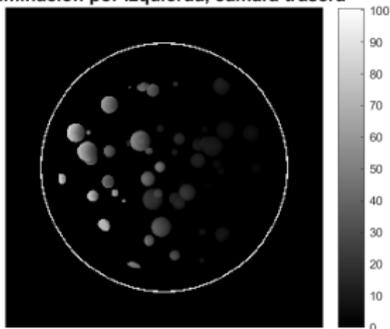
Máximo a lo largo de eje y  
Iluminación por izquierda, cámara frontal



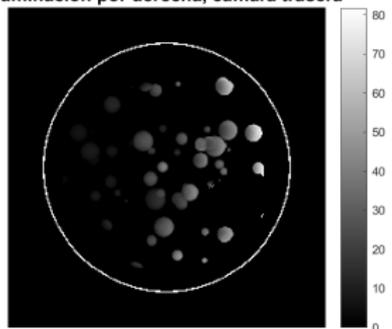
Máximo a lo largo de eje y  
Iluminación por derecha, cámara frontal



Máximo a lo largo de eje y  
Iluminación por izquierda, cámara trasera



Máximo a lo largo de eje y  
Iluminación por derecha, cámara trasera



## ¿Y el blur? Cámara no colimada

### 1 Introducción

- Introducción y motivación del problema

### 2 Modelo directo 2D

- Ecuación de Fermi pencil-beam y ecuación de transporte radiativo
- Problema inverso. Ecuación de calor y unicidad del problema

### 3 Estabilidad LSFM 2D

- Estabilidad logarítmica para recuperar condición inicial en ecuación de calor
- Estabilidad Lipschitz para recuperar condición inicial en ecuación de calor
- Estabilidad para el problema inverso de LSFM 2D

### 4 Modelo directo 3D

- Modelo directo LSFM 3D. Cámara colimada.
- ¿Y el blur? Cámara no colimada

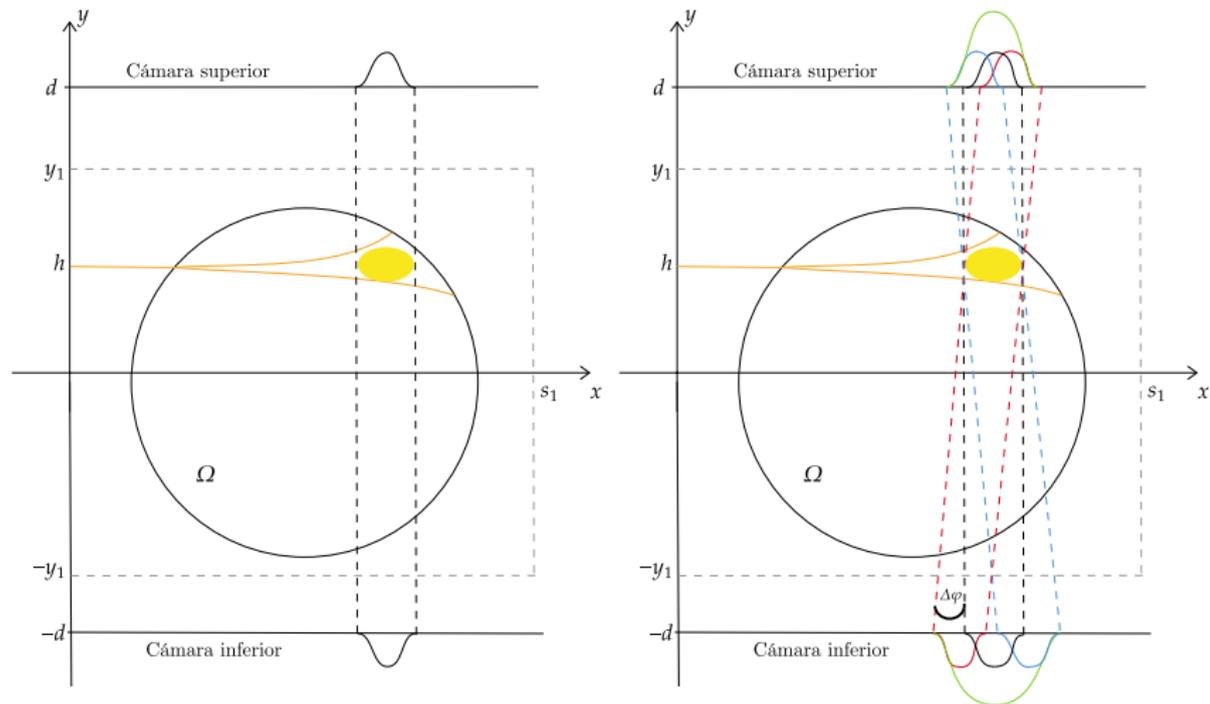
### 5 Red neuronal

- Arquitectura de la red neuronal para el caso 2D
- Problema 1
- Problema 2

### 6 Conclusiones

- Conclusiones y trabajo a futuro

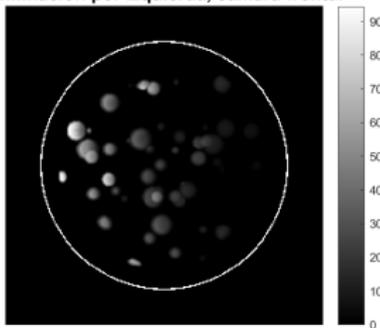
# ¿Y el blur? Cámara no colimada



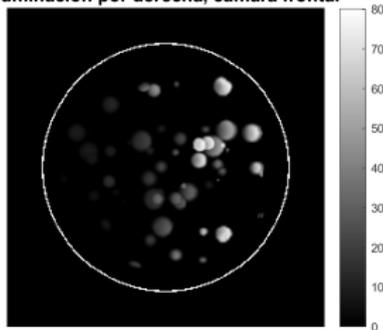
## ¿Y el blur? Cámara no colimada

# ¿Y el blur? Cámara no colimada

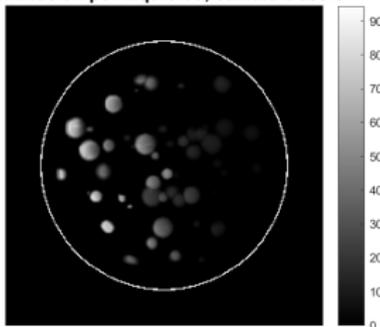
Máximo a lo largo de eje y  
Iluminación por izquierda, cámara frontal



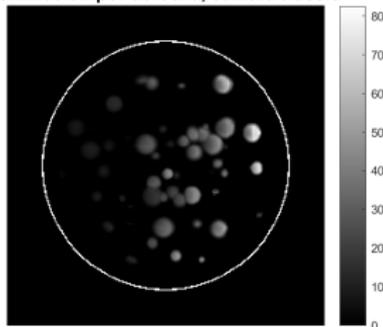
Máximo a lo largo de eje y  
Iluminación por derecha, cámara frontal



Máximo a lo largo de eje y  
Iluminación por izquierda, cámara trasera



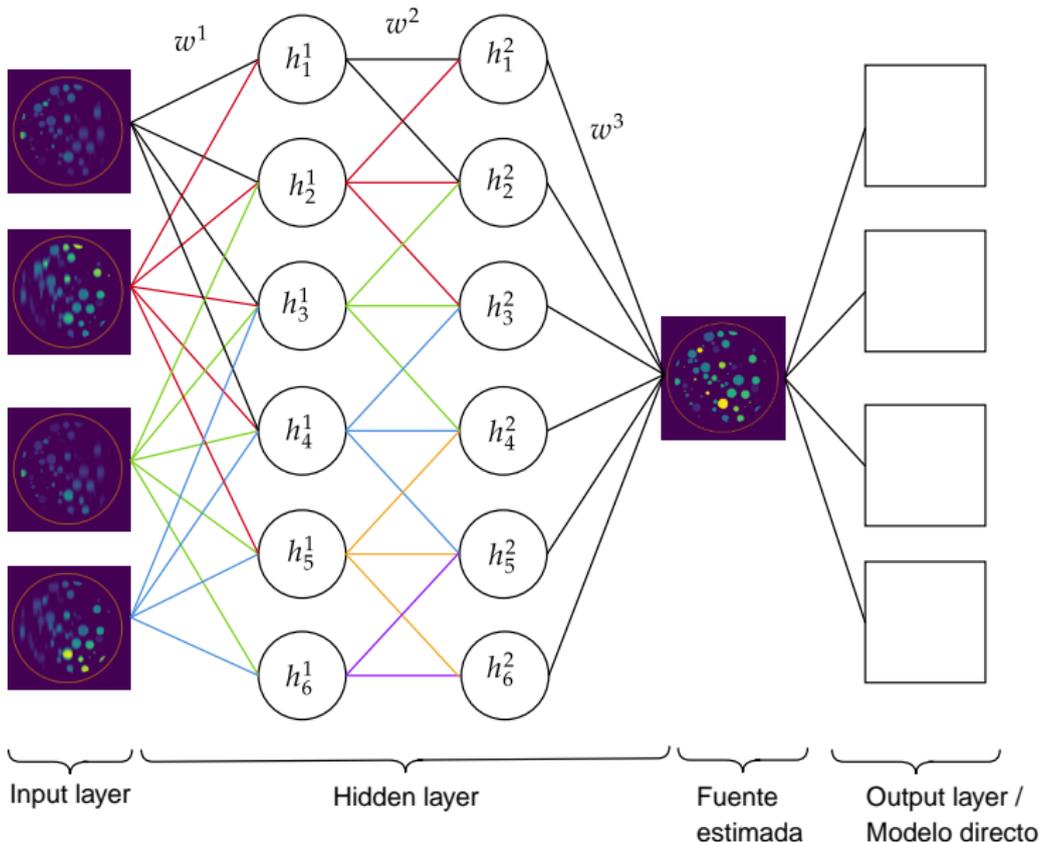
Máximo a lo largo de eje y  
Iluminación por derecha, cámara trasera



## Arquitectura de la red neuronal para el caso 2D

- 1 **Introducción**
  - Introducción y motivación del problema
- 2 **Modelo directo 2D**
  - Ecuación de Fermi pencil-beam y ecuación de transporte radiativo
  - Problema inverso. Ecuación de calor y unicidad del problema
- 3 **Estabilidad LSFM 2D**
  - Estabilidad logarítmica para recuperar condición inicial en ecuación de calor
  - Estabilidad Lipschitz para recuperar condición inicial en ecuación de calor
  - Estabilidad para el problema inverso de LSFM 2D
- 4 **Modelo directo 3D**
  - Modelo directo LSFM 3D. Cámara colimada.
  - ¿Y el blur? Cámara no colimada
- 5 **Red neuronal**
  - Arquitectura de la red neuronal para el caso 2D
  - Problema 1
  - Problema 2
- 6 **Conclusiones**
  - Conclusiones y trabajo a futuro

## Arquitectura de la red neuronal para el caso 2D



## Arquitectura de la red neuronal para el caso 2D

- **Input:** Mediciones.

## Arquitectura de la red neuronal para el caso 2D

- **Input:** Mediciones.
- **Capa 1:** Convolución con 4 filtros de tamaño  $3 \times 3 \times 4$ , más activación ReLU.
- **Capa 2:** Convolución con 16 filtro de tamaño  $3 \times 3 \times 4$ , más activación ReLU.
- **Capa 3:** Max pooling.

## Arquitectura de la red neuronal para el caso 2D

- **Input:** Mediciones.
- **Capa 1:** Convolución con 4 filtros de tamaño  $3 \times 3 \times 4$ , más activación ReLU.
- **Capa 2:** Convolución con 16 filtro de tamaño  $3 \times 3 \times 4$ , más activación ReLU.
- **Capa 3:** Max pooling.
- **Capa 4:** Convolución con 4 filtros de tamaño  $3 \times 3 \times 16$ , más activación ReLU.
- **Capa 5:** Convolución con 1 filtro de tamaño  $3 \times 3 \times 4$ , más función de activación.
- **Capa 6:** Max pooling.

## Arquitectura de la red neuronal para el caso 2D

- **Input:** Mediciones.
- **Capa 1:** Convolución con 4 filtros de tamaño  $3 \times 3 \times 4$ , más activación ReLU.
- **Capa 2:** Convolución con 16 filtro de tamaño  $3 \times 3 \times 4$ , más activación ReLU.
- **Capa 3:** Max pooling.
- **Capa 4:** Convolución con 4 filtros de tamaño  $3 \times 3 \times 16$ , más activación ReLU.
- **Capa 5:** Convolución con 1 filtro de tamaño  $3 \times 3 \times 4$ , más función de activación.
- **Capa 6:** Max pooling.
- **Output:** Aplicación del modelo directo.

## Arquitectura de la red neuronal para el caso 2D

- **Input:** Mediciones.
- **Capa 1:** Convolución con 4 filtros de tamaño  $3 \times 3 \times 4$ , más activación ReLU.
- **Capa 2:** Convolución con 16 filtro de tamaño  $3 \times 3 \times 4$ , más activación ReLU.
- **Capa 3:** Max pooling.
- **Capa 4:** Convolución con 4 filtros de tamaño  $3 \times 3 \times 16$ , más activación ReLU.
- **Capa 5:** Convolución con 1 filtro de tamaño  $3 \times 3 \times 4$ , más función de activación.
- **Capa 6:** Max pooling.
- **Output:** Aplicación del modelo directo.
- **En total son 1332 variables a optimizar!**

## Arquitectura de la red neuronal para el caso 2D

Se prueban distintas funciones de pérdida:

- $\|\mathcal{P}[\mu] - \mathcal{P}[\mu^*]\|_{L^1}$
- $\|\mathcal{P}[\mu] - \mathcal{P}[\mu^*]\|_{L^1} + \alpha TV(\mu^*)$ , con  $\alpha = 0,5$ .
- $\|\mathcal{P}[\mu] - \mathcal{P}[\mu^*]\|_{L^2}$
- $\|\mathcal{P}[\mu] - \mathcal{P}[\mu^*]\|_{L^2} + \alpha TV(\mu^*)$ , con  $\alpha = 0,005$

Se usa el optimizador ADAM de Tensorflow.

Se resuelve en Google Colab con GPU NVIDIA Tesla K80 de 12GB de memoria.

## Problema 1

- 1 **Introducción**
  - Introducción y motivación del problema
- 2 **Modelo directo 2D**
  - Ecuación de Fermi pencil-beam y ecuación de transporte radiativo
  - Problema inverso. Ecuación de calor y unicidad del problema
- 3 **Estabilidad LFSM 2D**
  - Estabilidad logarítmica para recuperar condición inicial en ecuación de calor
  - Estabilidad Lipschitz para recuperar condición inicial en ecuación de calor
  - Estabilidad para el problema inverso de LFSM 2D
- 4 **Modelo directo 3D**
  - Modelo directo LFSM 3D. Cámara colimada.
  - ¿Y el blur? Cámara no colimada
- 5 **Red neuronal**
  - Arquitectura de la red neuronal para el caso 2D
    - **Problema 1**
    - Problema 2
- 6 **Conclusiones**
  - Conclusiones y trabajo a futuro

## Problema 1

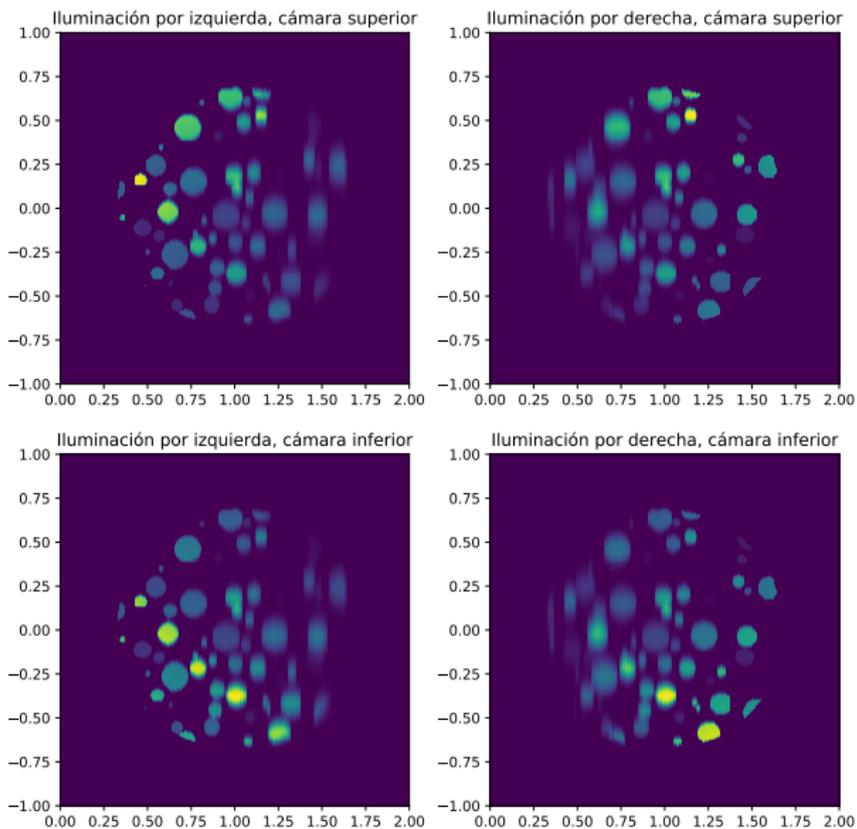
### Problema 1

Recuperar  $\mu$  a partir de las mediciones cuando los parámetros físicos  $\lambda, \psi$ , y  $a$  son constantes y conocidos.

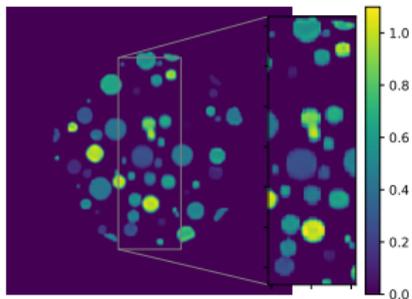
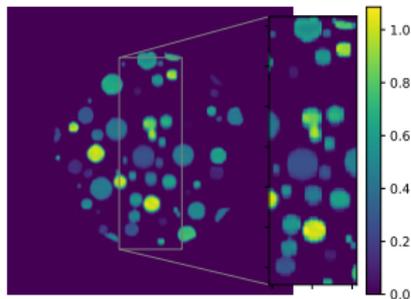
Las mediciones se generan con los siguientes parámetros:

- $\lambda = 0,1 \cdot \mathbb{1}_\Omega$
- $a = 0,7 \cdot \mathbb{1}_\Omega$
- $\psi = 0,004 \cdot \mathbb{1}_\Omega$

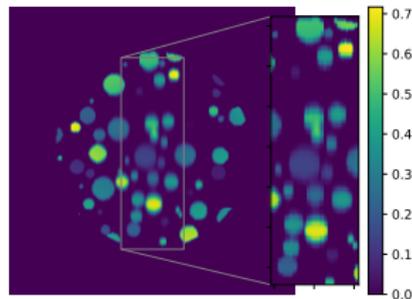
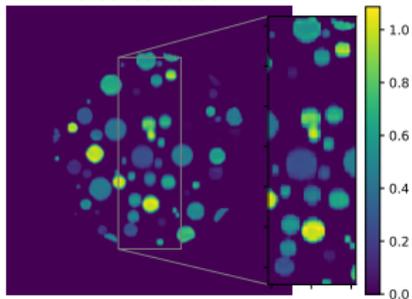
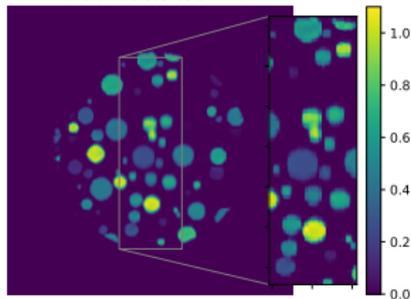
# Problema 1



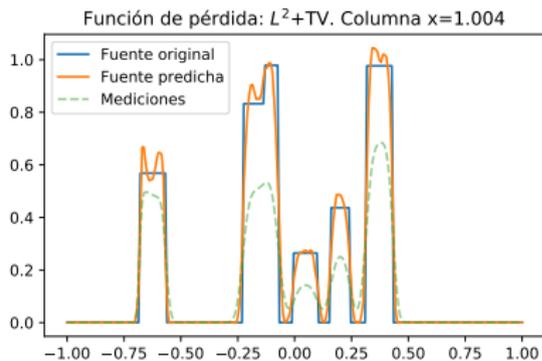
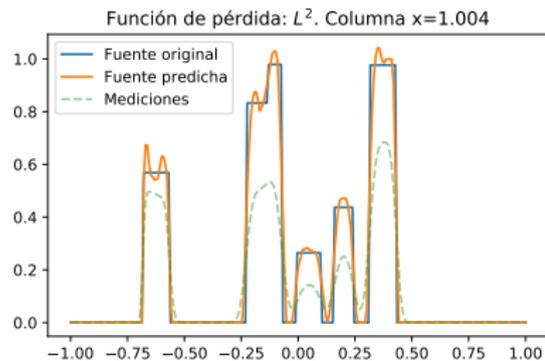
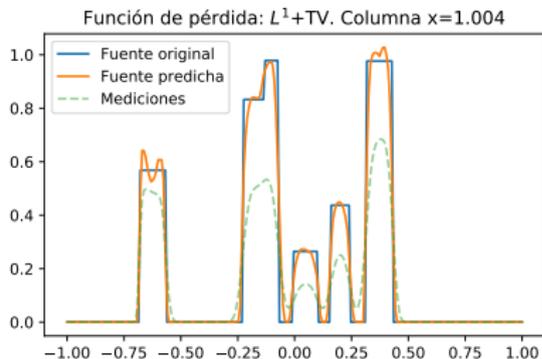
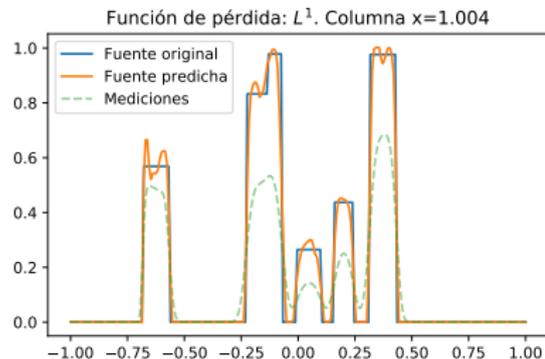
## Problema 1

Función de costos  $L^1$ Función de costos  $L^1+TV$ 

Mediciones

Función de costos  $L^2$ Función de costos  $L^2+TV$ 

## Problema 1



## Problema 1

Función de pérdida	$\frac{\ \mu - \mu^*\ _1}{\ \mu\ _1}$	$\frac{\ \mu - \mu^*\ _2}{\ \mu\ _2}$	SSIM
Mediciones	0.448	0.426	0.929
$L^1$	0.133	0.196	0.975
$L^1+TV$	0.208	0.259	0.952
$L^2$	0.194	0.241	0.955
$L^2+TV$	0.156	0.217	0.968

Cuadro: Error relativo con norma  $L^1$ , con norma  $L^2$  y el índice SSIM.

Función de pérdida	Google Colab			PC de escritorio
	Tiempo CPU [s]	Tiempo TPU [s]	Tiempo GPU [s]	Tiempo GPU [s]
$L^1$	691.49	240.58	36.19	61.91
$L^1+TV$	693.60	280.93	36.43	63.60
$L^2$	687.97	229.17	36.21	63.01
$L^2+TV$	694.97	288.64	36.49	65.20

Cuadro: Tiempos de ejecución en segundos para 1024 iteraciones.

## Problema 2

- 1 **Introducción**
  - Introducción y motivación del problema
- 2 **Modelo directo 2D**
  - Ecuación de Fermi pencil-beam y ecuación de transporte radiativo
  - Problema inverso. Ecuación de calor y unicidad del problema
- 3 **Estabilidad LSFM 2D**
  - Estabilidad logarítmica para recuperar condición inicial en ecuación de calor
  - Estabilidad Lipschitz para recuperar condición inicial en ecuación de calor
  - Estabilidad para el problema inverso de LSFM 2D
- 4 **Modelo directo 3D**
  - Modelo directo LSFM 3D. Cámara colimada.
  - ¿Y el blur? Cámara no colimada
- 5 **Red neuronal**
  - Arquitectura de la red neuronal para el caso 2D
  - Problema 1
  - **Problema 2**
- 6 **Conclusiones**
  - Conclusiones y trabajo a futuro

## Problema 2

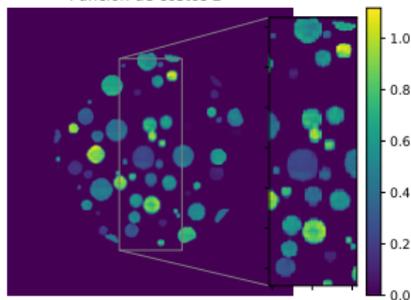
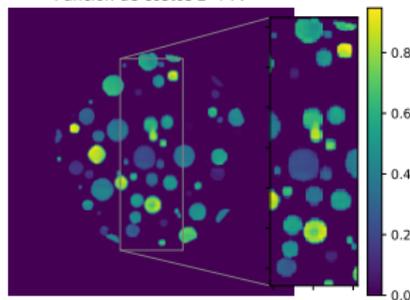
### Problema 2

Recuperar  $\mu$  a partir de las mediciones generadas por parámetros físicos  $\lambda, \psi$ , y  $a$  variables y desconocidos, pero proceder suponiendo que son constantes por determinar.

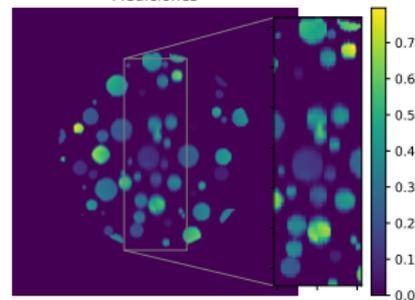
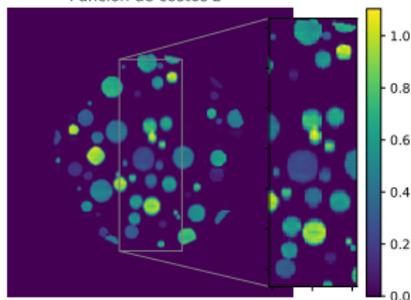
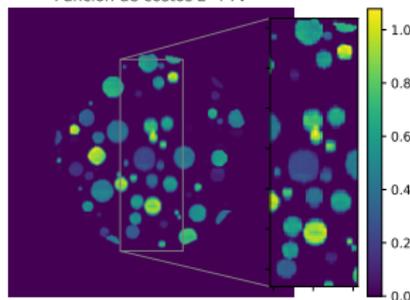
Las mediciones se generan con los siguientes parámetros:

- $\lambda = 0,5 \cdot \mathbb{1}_\Omega + 2 \cdot \mu$
- $a = 0,175 \cdot \mathbb{1}_\Omega + 0,7 \cdot \mu$
- $\psi = 0,002 \cdot \mathbb{1}_\Omega + 0,008 \cdot \mu$

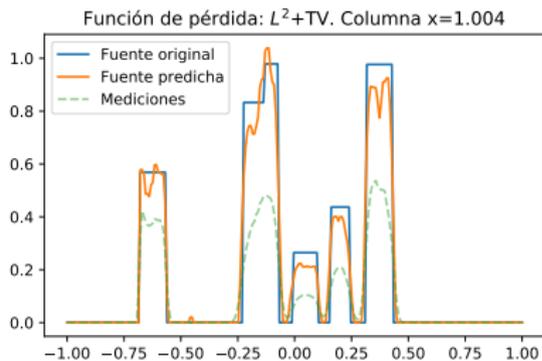
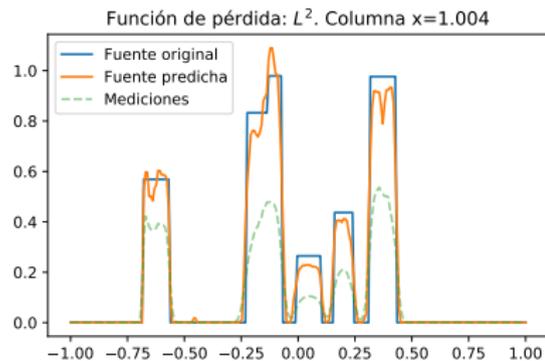
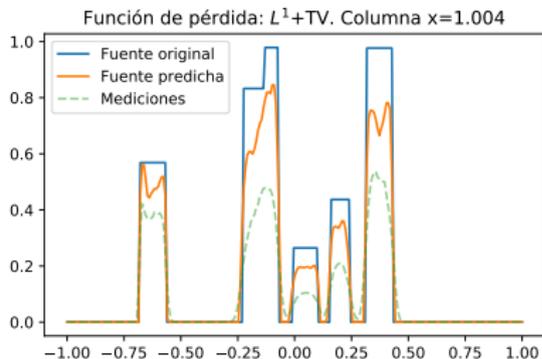
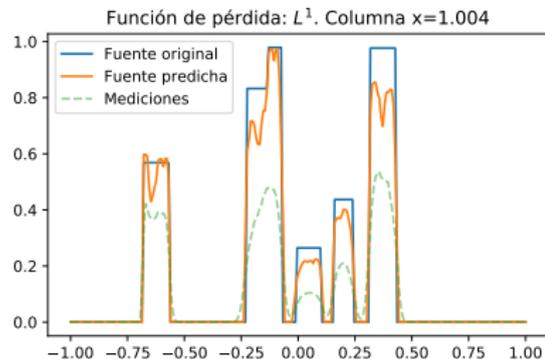
## Problema 2

Función de costos  $L^1$ Función de costos  $L^1+TV$ 

Mediciones

Función de costos  $L^2$ Función de costos  $L^2+TV$ 

## Problema 2



## Problema 2

Función de pérdida	$\frac{\ \mu - \mu^*\ _{L^1}}{\ \mu\ _{L^1}}$	$\frac{\ \mu - \mu^*\ _{L^2}}{\ \mu\ _{L^2}}$	SSIM	$\lambda$	$\psi$	$a$
Mediciones	0.458	0.453	0.935	-	-	-
$L^1$	0.162	0.207	0.971	0.746	0.0023	0.260
$L^1+TV$	0.181	0.225	0.973	0.620	0.0022	0.281
$L^2$	0.181	0.219	0.966	0.775	0.0021	0.317
$L^2+TV$	0.195	0.233	0.964	0.714	0.0021	0.300

**Cuadro:** Constantes estimadas y error relativo con norma  $L^1$ , con norma  $L^2$  y el índice SSIM.

Los valores promedio de  $\lambda$ ,  $\psi$  y  $a$  son

- $\bar{\lambda} = 0,677$ .
- $\bar{\psi} = 0,0027$ .
- $\bar{a} = 0,237$ .

## Problema 2

Función de pérdida	Google Colab			PC de escritorio
	Tiempo CPU [s]	Tiempo TPU [s]	Tiempo GPU [s]	Tiempo GPU+CPU [s]
$L^1$	2057.96	445.08	87.58	1108.54
$L^1+TV$	2087.59	494.36	87.63	1123.42
$L^2$	2029.74	445.28	87.50	1112.33
$L^2+TV$	2025.66	490.88	87.59	1110.70

**Cuadro:** Tiempos de ejecución en segundos para 1024 iteraciones.

## Conclusiones y trabajo a futuro

- 1 **Introducción**
  - Introducción y motivación del problema
- 2 **Modelo directo 2D**
  - Ecuación de Fermi pencil-beam y ecuación de transporte radiativo
  - Problema inverso. Ecuación de calor y unicidad del problema
- 3 **Estabilidad LSFM 2D**
  - Estabilidad logarítmica para recuperar condición inicial en ecuación de calor
  - Estabilidad Lipschitz para recuperar condición inicial en ecuación de calor
  - Estabilidad para el problema inverso de LSFM 2D
- 4 **Modelo directo 3D**
  - Modelo directo LSFM 3D. Cámara colimada.
  - ¿Y el blur? Cámara no colimada
- 5 **Red neuronal**
  - Arquitectura de la red neuronal para el caso 2D
  - Problema 1
  - Problema 2
- 6 **Conclusiones**
  - Conclusiones y trabajo a futuro

## Conclusiones y trabajo a futuro

- La estabilidad logarítmica para recuperar la condición inicial de la ecuación de calor para observaciones hechas en un conjunto de la forma  $\omega \times (\tau, T)$  está para dominios acotados y ahora para  $\mathbb{R}^n$ . ¿Cómo extenderlo a un dominio no acotado más general?

## Conclusiones y trabajo a futuro

- La estabilidad logarítmica para recuperar la condición inicial de la ecuación de calor para observaciones hechas en un conjunto de la forma  $\omega \times (\tau, T)$  está para dominios acotados y ahora para  $\mathbb{R}^n$ . ¿Cómo extenderlo a un dominio no acotado más general?
- La estabilidad de tipo Lipschitz es un resultado novedoso en el contexto de la ecuación de calor. ¿Se podrá extender a condiciones inicial más generales?

## Conclusiones y trabajo a futuro

- La estabilidad logarítmica para recuperar la condición inicial de la ecuación de calor para observaciones hechas en un conjunto de la forma  $\omega \times (\tau, T)$  está para dominios acotados y ahora para  $\mathbb{R}^n$ . ¿Cómo extenderlo a un dominio no acotado más general?
- La estabilidad de tipo Lipschitz es un resultado novedoso en el contexto de la ecuación de calor. ¿Se podrá extender a condiciones inicial más generales?
- ¿Qué implicancias tiene la estabilidad para LSMF en el aspecto numérico?

## Conclusiones y trabajo a futuro

- La estabilidad logarítmica para recuperar la condición inicial de la ecuación de calor para observaciones hechas en un conjunto de la forma  $\omega \times (\tau, T)$  está para dominios acotados y ahora para  $\mathbb{R}^n$ . ¿Cómo extenderlo a un dominio no acotado más general?
- La estabilidad de tipo Lipschitz es un resultado novedoso en el contexto de la ecuación de calor. ¿Se podrá extender a condiciones inicial más generales?
- ¿Qué implicancias tiene la estabilidad para LSMF en el aspecto numérico?
- La falta de blur en el caso tridimensional fue solucionada suponiendo que las cámaras son no colimadas. ¿Podrá agregarse un término de scattering para la fase de proyección?

## Conclusiones y trabajo a futuro

- La estabilidad logarítmica para recuperar la condición inicial de la ecuación de calor para observaciones hechas en un conjunto de la forma  $\omega \times (\tau, T)$  está para dominios acotados y ahora para  $\mathbb{R}^n$ . ¿Cómo extenderlo a un dominio no acotado más general?
- La estabilidad de tipo Lipschitz es un resultado novedoso en el contexto de la ecuación de calor. ¿Se podrá extender a condiciones inicial más generales?
- ¿Qué implicancias tiene la estabilidad para LSMF en el aspecto numérico?
- La falta de blur en el caso tridimensional fue solucionada suponiendo que las cámaras son no colimadas. ¿Podrá agregarse un término de scattering para la fase de proyección?
- La resolución numérica del problema inverso bidimensional vía redes neuronales deja pavimentado el camino para tratar el problema tridimensional.

## Conclusiones y trabajo a futuro

- La estabilidad logarítmica para recuperar la condición inicial de la ecuación de calor para observaciones hechas en un conjunto de la forma  $\omega \times (\tau, T)$  está para dominios acotados y ahora para  $\mathbb{R}^n$ . ¿Cómo extenderlo a un dominio no acotado más general?
- La estabilidad de tipo Lipschitz es un resultado novedoso en el contexto de la ecuación de calor. ¿Se podrá extender a condiciones inicial más generales?
- ¿Qué implicancias tiene la estabilidad para LSMF en el aspecto numérico?
- La falta de blur en el caso tridimensional fue solucionada suponiendo que las cámaras son no colimadas. ¿Podrá agregarse un término de scattering para la fase de proyección?
- La resolución numérica del problema inverso bidimensional vía redes neuronales deja pavimentado el camino para tratar el problema tridimensional.
- Para problemas actuales el uso de infraestructura de alto rendimiento se vuelve indispensable. Se espera poder resolver el problema tridimensional en el cluster Guacolda-Leftrararu.

## Conclusiones y trabajo a futuro

Muchas gracias por su atención!